Lineare Algebra I
14. Tutorium
Lineare Abbildungen und Matrizen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
7. Februar 2011

Aufgaben

Aufgabe G1 (Bewegungen im $\mathbb{R}^2$)
Als Bewegung im $\mathbb{R}^2$ werden Spiegelungen, Drehungen und beliebige Zusammensetzungen von Spiegelungen und Drehungen bezeichnet.
Drehungen um den Koordinatenursprung in $\mathbb{R}^2$ und Spiegelungen an einer Gerade durch den Koordinatenursprung sind lineare Abbildungen.

(a) Betrachten Sie die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine Matrix A an, sodass $\varphi = \varphi_A$ die Multiplikation mit A ist.
Stellen Sie einige Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ und ihre Bilder unter φ graphisch dar. Welche Bewegung im $\mathbb{R}^2$ wird durch diese Abbildung beschrieben?

(b) Es sei $\alpha \in [0, 2\pi)$. Betrachten Sie die Abbildung

$$\varphi_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\ x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine Matrix A_α an, sodass $\varphi_\alpha = \varphi_{A_\alpha}$ die Multiplikation mit A_α ist.
Stellen Sie einige Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ und ihre Bilder unter φ graphisch dar. Welche Bewegung im $\mathbb{R}^2$ wird durch diese Abbildung beschrieben?

(c) Es sei χ_1 die Abbildung, welche die Spiegelung an der x_1-Achse beschreibt. Geben Sie eine explizite Abbildungsvorschrift für χ_1 an (in der Form, wie sie in den Aufgabenteilen (a) und (b) gegeben ist). Bestimmen Sie weiterhin eine Matrix B_1 mit $\chi_1 = \varphi_{B_1}$.

(d) Es sei χ_2 die Abbildung, welche die Spiegelung an Gerade $x_1 = x_2$ beschreibt. Geben Sie eine explizite Abbildungsvorschrift für χ_2 an. Bestimmen Sie weiterhin eine Matrix B_2 mit $\chi_2 = \varphi_{B_2}$.

(e) Berechenen Sie $\varphi_{\frac{\pi}{2}} \circ \chi_1$ auf zwei Arten:
   (1) Setzen Sie die expliziten Abbildungsvorschriften ineinander ein
   (2) Multiplizieren Sie die zu den Abbildungen gehörigen Matrizen in der richtigen Reihenfolge (siehe Satz 5.5.13 aus der Vorlesung). Die zu der entstehenden Matrix gehörige Abbildung ist dann die gesuchte Zusammensetzung.

Ergeben beide Wege wirklich dasselbe Ergebnis?
Welche der Abbildungen aus den vorherigen Aufgaben ist diese Zusammensetzung?

Aufgabe G2 (Matrizen linearer Abbildungen bezüglich verschiedener Basen)

(a) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^2$ und eine Basis C von $\mathbb{R}^2$, sodass die Matrix $[\varphi_1]_C^B$ der Abbildung bezüglich dieser Basen die Einheitsmatrix ist.

(b) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis D von $\mathbb{R}^3$ und eine Basis F von $\mathbb{R}^4$, sodass die Matrix $[\varphi_2]_F^D$ der Abbildung bezüglich dieser Basen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.

Hinweis: In der Vorlesung wurde ein Satz bewiesen, der aussagt, dass man zu jeder linearen Abbildung Basen findet, so dass die zugehörige Matrix die Identität eventuell ergänzt um einige Nullzeilen und/oder Nullspalten ist.

Aufgabe G3 (Basiswechsel)
Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ habe bezüglich der Standardbasis

$$E = (e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

die Matrix

$$[\varphi]_E^E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Matrix $[\varphi]_B^B$ von φ bezüglich der Basis

$$B = (b_1, b_2, b_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$