Lineare Algebra I
13. Tutorium
Lineare Abbildungen und Rang

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
25. Januar 2011

Aufgaben

Aufgabe G1 (Lineare Abbildungen)
Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume.

(a) Zeigen Sie, dass es genau dann einen Isomorphismus $\varphi : V \to W$ gibt, wenn $\dim V = \dim W$ gilt.

(b) Es sei U ein Untervektorraum von V und $\varphi : U \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $\widetilde{\varphi} : V \to W$ gibt, für die $\widetilde{\varphi}|_U = \varphi$ gilt.

Lösung:

(a)
- Angenommen es gibt einen Isomorphismus $\varphi : V \to W$.
  Dann gilt $\operatorname{im} \varphi = W$ da φ surjektiv ist und $\ker \varphi = \{0\}$ da φ injektiv ist. Mit der bekannten Dimensionsformel ergibt sich
  $$\dim V = \dim(\operatorname{im} \varphi) + \dim(\ker \varphi) = \dim W + \dim\{0\} = \dim W\,.$$
- Angenommen es gilt $\dim V = \dim W$.
  Dann gibt es eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von V und eine Basis $w_1, \dots, w_n$ von W und nach Aufgabe H1 vom Übungsblatt 9 genau einen Vektorraumisomorphismus $\varphi : V \to W$ mit
  $$\varphi(v_1) = w_1, \dots, \varphi(v_n) = w_n\,.$$
  Insbesondere existiert also ein Vektorraumisomorphismus von V nach W.

w.z.b.w.

(b) Da U als Untervektorraum von V endlichdimensional ist, gibt es eine Basis $u_1, \dots, u_m$ von U. Diese kann nach dem Basisergänzungssatz zu einer Basis von V erweitert werden. D.h. es gibt Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$, sodass $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V bildet. Wir betrachten jetzt die Abbildung

$$\widetilde{\varphi} : V \to W, \quad \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m + \mu_1 v + \ldots + \mu_n v_n \mapsto \varphi(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m)\,.$$

Man kann jedes Element von V eindeutig in der Form $u + v$ mit $u \in U$ und $v \in \operatorname{spann}(v_1, \dots, v_n) =: \widetilde{V}$ darstellen (das folgt aus der Angabe der obigen Basis). Des Weiteren gilt $\widetilde{\varphi}(u + v) = \varphi(u)$ für alle $u \in U, v \in \widetilde{V}$. Daraus ergibt sich sofort

$$\widetilde{\varphi}(u) = \varphi(u)\ \forall\, u \in U \Rightarrow \widetilde{\varphi}|_U = \varphi\,.$$

Außerdem gilt für $u_1, u_2 \in U, v_1, v_2 \in \widetilde{V}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(\lambda_1(u_1 + v_1) + \lambda_2(u_2 + v_2)) &= \widetilde{\varphi}((\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) + (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) = \varphi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 \varphi(u_1) + \lambda_2 \varphi(u_2) \\ &= \lambda_1 \widetilde{\varphi}(u_1 + v_1) + \lambda_2 \widetilde{\varphi}(u_2 + v_2)\,.\end{aligned}$$

D.h. $\widetilde{\varphi}$ ist eine lineare Abbildung und hat damit alle in der Aufgabe geforderten Eigenschaften.

w.z.b.w.

Aufgabe G2 (Matrizen und lineare Abbildungen)
Betrachten Sie die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sind die zugehörigen linearen Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv? Zeigen Sie ihre Behauptungen.

Lösung:

- Die erste und die letzte Spalte von A_1 sind vielfache voneinander. Man zeigt leicht, dass die ersten drei Spalten linear unabhängig sind. D.h. die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von A_1 ist drei. Also gilt

$$\operatorname{rank} A_1 = \dim(\operatorname{im} \varphi_{A_1}) = 3 .$$

Die Abbildung φ_{A_1} hat die Gestalt

$$\varphi_{A_1} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 .$$

D.h. da $\dim(\operatorname{im} \varphi_{A_1}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ gilt, ist φ_{A_1} **surjektiv**.
Außerdem gilt

$$\dim(\ker \varphi_{A_1}) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim(\operatorname{im} \varphi_{A_1}) = 4 - 3 = 1 \neq 0 ,$$

d.h. φ_{A_1} ist **nicht injektiv**.
Es folgt, dass φ_{A_1} **nicht bijektiv** ist.

- Die letzte Zeile von A_2 ist ein Vielfaches der ersten. Für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_1 = 0 .$$

Das bedeutet die ersten drei Zeilen von A_2 sind linear unabhängig. D.h. die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen von A_2 ist drei. Also gilt

$$\operatorname{rank} A_2 = \dim(\operatorname{im} \varphi_{A_2}) = 3 .$$

Die Abbildung φ_{A_2} hat die Gestalt

$$\varphi_{A_2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 .$$

D.h. da $\dim(\operatorname{im} \varphi_{A_2}) = 3 \neq 4 = \dim \mathbb{R}^4$ gilt, ist φ_{A_2} **nicht surjektiv**.
Außerdem gilt

$$\dim(\ker \varphi_{A_2}) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\operatorname{im} \varphi_{A_2}) = 3 - 3 = 0 ,$$

d.h. φ_{A_2} ist **injektiv**.
Es folgt, dass φ_{A_2} **nicht bijektiv** ist.

- Die erste und dritte Spalte bzw. die zweite und vierte Spalte von A_3 sind Vielfache voneinander. Außerdem sieht man sofort, dass die ersten beiden Spalten von A_3 linear unabhängig sind. D.h. die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von A_3 ist zwei. Also gilt
$$\operatorname{rank} A_3 = \dim(\operatorname{im} \varphi_{A_3}) = 2\,.$$
Die Abbildung φ_{A_3} hat die Gestalt
$$\varphi_{A_3} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3\,.$$
D.h. da $\dim(\operatorname{im} \varphi_{A_3}) = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$ gilt, ist φ_{A_3} **nicht surjektiv**.
Außerdem gilt
$$\dim(\ker \varphi_{A_3}) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim(\operatorname{im} \varphi_{A_3}) = 4 - 2 = 2 \neq 0\,,$$
d.h. φ_{A_3} ist **nicht injektiv**.
Es folgt, dass φ_{A_3} **nicht bijektiv** ist.
- Die Matrix A_4 ist bereits in Stufenform, d.h. die Zeilen sind linear unabhängig und es ergibt sich
$$\operatorname{rank} A_4 = \dim(\operatorname{im} \varphi_{A_4}) = 3\,.$$
Die Abbildung φ_{A_4} hat die Gestalt
$$\varphi_{A_4} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,.$$
D.h. da $\dim(\operatorname{im} \varphi_{A_4}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ gilt, ist φ_{A_4} **surjektiv**.
Außerdem gilt
$$\dim(\ker \varphi_{A_4}) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\operatorname{im} \varphi_{A_4}) = 3 - 3 = 0\,,$$
d.h. φ_{A_4} ist **injektiv**.
Es folgt, dass φ_{A_4} **bijektiv** ist.

Aufgabe G3 (Bild einer linearen Abbildung)
Bestimmen Sie eine Matrix A, so dass die zugehörige lineare Abbildung $\varphi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ das Bild
$$\operatorname{im} \varphi_A = V := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$
hat.
Geben Sie weiterhin eine 4×4-Matrix B an, für die φ_B dasselbe Bild hat.

Lösung: Die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ ist genau dann erfüllt, wenn $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$ gilt. Daraus ergibt sich sofort
$$V = \operatorname{spann}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$
Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Bilder der Einheitvektoren unter φ_A gerade die Spalten von A sind. Außerdem wird das Bild von φ_A aufgespannt von den Bildern der Einheitsvektoren unter φ_A. Zusammen ergibt sich, dass für
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$\operatorname{im} \varphi_A = V$ gilt.
Analog sieht man, dass für
$$B := \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
φ_B dasselbe Bild hat.

Aufgabe G4 (Rang)

Zeigen Sie, dass der Rang einer Matrix mit Einträgen aus einem Körper $\mathbb{K}$ unverändert bleibt, wenn man

(a) das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert

(b) eine Zeile mit einem Element aus $\mathbb{K} - \{0\}$ multipliziert

(c) die Reihenfolge der Zeilen vertauscht

(d) die in (a)-(c) beschriebenen Operationen mit Spalten anstelle von Zeilen ausführt.

Lösung: Ich bezeichne die Zeilen der gegebenen Matrix A mit $a^1, \ldots, a^n$. Dann ist $\operatorname{rank} A = \dim\Big(\operatorname{spann}(a^1, \ldots, a^n)\Big)$. Um (a) zu zeigen, reicht es also zu beweisen, dass

$$\operatorname{spann}(a^1, \ldots, a^n) = \operatorname{spann}(a^1, \ldots, a^{i-1}, a^i + \lambda a^j, a^{i+1}, \ldots, a^n) \text{ für } \lambda \in \mathbb{K}, i \neq j$$

gilt.

Für (b) muss man nur zeigen, dass

$$\operatorname{spann}(a^1, \ldots, a^n) = \operatorname{spann}(a^1, \ldots, a^{i-1}, \lambda a^i, a^{i+1}, \ldots, a^n) \text{ für } \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$$

gilt.

Und in Aufgabenteil (c) muss man

$$\operatorname{spann}(a^1, \ldots, a^n) = \operatorname{spann}(a^1, \ldots, a^{i-1}, a^j, a^{i+1}, \ldots, a^{j-1}, a^i, a^{j+1}, \ldots, a^n) \text{ für } \lambda \in \mathbb{K}, i \neq j$$

zeigen.

Um die Gleichheit von zwei aufgespannten Unterräumen zu zeigen, reicht es zu zeigen dass die aufspannenden Vektoren jeweils in dem anderen Unterraum enthalten sind. Dies folgt für die obigen Gleichungen jeweils sofort.

Damit sind die Aufgabeteile (a)-(c) bewiesen.

Für den Aufgabenteil (d) verwendet man, dass $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$ gilt. Das Transponieren überführt die Spalten einer Matrix A in die Zeilen der Matrix A^T. Zusammen mit den Aufgabenteilen (a)-(c) folgt daraus die Aussage von (d).

w.z.b.w.