Lineare Algebra I
13. Tutorium
Lineare Abbildungen und Rang

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
25. Januar 2011

Aufgaben

Aufgabe G1 (Lineare Abbildungen)
Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume.

(a) Zeigen Sie, dass es genau dann einen Isomorphismus $\varphi : V \to W$ gibt, wenn $\dim V = \dim W$ gilt.

(b) Es sei U ein Untervektorraum von V und $\varphi : U \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $\widetilde{\varphi} : V \to W$ gibt, für die $\widetilde{\varphi}|_U = \varphi$ gilt.

Aufgabe G2 (Matrizen und lineare Abbildungen)
Betrachten Sie die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sind die zugehörigen linearen Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv? Zeigen Sie ihre Behauptungen.

Aufgabe G3 (Bild einer linearen Abbildung)
Bestimmen Sie eine Matrix A, so dass die zugehörige lineare Abbildung $\varphi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ das Bild

$$\operatorname{im} \varphi_A = V := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

hat.
Geben Sie weiterhin eine 4×4-Matrix B an, für die φ_B dasselbe Bild hat.

Aufgabe G4 (Rang)
Zeigen Sie, dass der Rang einer Matrix mit Einträgen aus einem Körper $\mathbb{K}$ unverändert bleibt, wenn man

(a) das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert

(b) eine Zeile mit einem Element aus $\mathbb{K} - \{0\}$ multipliziert

(c) die Reihenfolge der Zeilen vertauscht

(d) die in (a)-(c) beschriebenen Operationen mit Spalten anstelle von Zeilen ausführt.