Lineare Algebra I
12. Tutorium
Vektorräume und Rang von Matrizen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
17. Januar 2011

Aufgaben

Aufgabe G1 (Vektorräume)
Es seien M eine beliebige Menge und V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{F}(M,W)$ der Abbildungen von M nach W mit den üblichen Operationen

$$\begin{array}{lll} +: \mathcal{F}(M,W)\times\mathcal{F}(M,W)\to\mathcal{F}(M,W), & (f,g)\mapsto f+g & \text{mit} \quad (f+g)(x):=f(x)+g(x)\,\forall x\in M \text{ und} \\ \cdot: \mathbb{K}\times\mathcal{F}(M,W)\to\mathcal{F}(M,W), & (\lambda,g)\mapsto \lambda g & \text{mit} \quad (\lambda g)(x):=\lambda\cdot g(x)\,\forall x\in M \end{array}$$

einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bildet.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Hom}(V,W)$ aller linearen Abbildungen von V nach W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist, indem sie zeigen, dass es sich bei $\mathrm{Hom}(V,W)$ um einen Untervektorraum von $\mathcal{F}(V,W)$ handelt.

Lösung:

(a) Offensichtlich sind die Operationen $+$ und $\cdot$ wohldefiniert. Außerdem ist die Abbildung 0, welche jedes Element von M in $0\in W$ abbildet, das Nullelement in $\mathcal{F}(M,W)$. Man muss also nur noch die Eigenschaften (V1)-(V8) aus der Definition von Vektorräumen zeigen.
Dazu seien $f,g,h\in\mathcal{F}(M,W), \lambda,\mu\in\mathbb{K}$ und $x\in M$ beliebig. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
(f+(g+h))(x) &= f(x)+(g+h)(x)=f(x)+(g(x)+h(x)) \overset{\text{(V1) in }W}{=} (f(x)+g(x))+h(x)=(f+g)(x)+h(x)\\
&= ((f+g)+h)(x)\\
\Rightarrow f+(g+h) &= (f+g)+h \quad\Rightarrow\quad \text{(V1)}\\
(f+0)(x) &= f(x)+0(x)=f(x)+0 \overset{\text{(V2) in }W}{=} f(x)\\
\Rightarrow f+0 &= f \quad\Rightarrow\quad \text{(V2)}\\
(f+(-1)f)(x) &= f(x)+((-1)\cdot f)(x)=f(x)+(-1)\cdot f(x) \overset{\text{(V3) in }W}{=} 0=0(x)\\
\Rightarrow f+(-1)f &= 0 \quad\Rightarrow\quad \text{(V3)}\\
(f+g)(x) &= f(x)+g(x) \overset{\text{(V4) in }W}{=} g(x)+f(x)=(g+f)(x)\\
\Rightarrow f+g &= g+f \quad\Rightarrow\quad \text{(V4)}\\
(\lambda(f+g))(x) &= \lambda\cdot((f+g)(x))=\lambda\cdot(f(x)+g(x)) \overset{\text{(V5) in }W}{=} \lambda\cdot f(x)+\lambda\cdot g(x)=(\lambda f)(x)+(\lambda g)(x)\\
&= (\lambda f+\lambda g)(x)\\
\Rightarrow \lambda(f+g) &= \lambda f+\lambda g \quad\Rightarrow\quad \text{(V5)}\\
((\lambda+\mu)f))(x) &= (\lambda+\mu)\cdot f(x) \overset{\text{(V6) in }W}{=} \lambda\cdot f(x)+\mu\cdot f(x)=(\lambda f)(x)+(\mu f)(x)=(\lambda f+\mu f)(x)\\
\Rightarrow (\lambda+\mu)f &= \lambda f+\mu f \quad\Rightarrow\quad \text{(V6)}\\
(\lambda(\mu f))(x) &= \lambda\cdot(\mu f)(x)=\lambda\cdot(\mu\cdot f(x)) \overset{\text{(V7) in }W}{=} (\lambda\mu)\cdot f(x)=((\lambda\mu)f)(x)\\
\Rightarrow \lambda(\mu f) &= (\lambda\mu)f \quad\Rightarrow\quad \text{(V7)}\\
(1\cdot f)(x) &= 1\cdot f(x) \overset{\text{(V8) in }W}{=} f(x)\\
\Rightarrow 1\cdot f &= f \quad\Rightarrow\quad \text{(V8)}\,.
\end{aligned}$$

w.z.b.w.

(b) Man zeigt die drei Unterraumkriterien für $\mathrm{Hom}(V,W)$:
 - $0 \in \mathcal{F}(V,W)$ ist die Abbildung

$$0 : V \to W, \qquad v \mapsto 0\,.$$

 Diese ist offensichtlich linear. D.h. es gilt $0 \in \mathrm{Hom}(V,W)$ und damit ist (U1) erfüllt.
 - Seien $f, g \in \mathrm{Hom}(V,W)$ beliebig. Dann gilt für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ und $v_1, v_2 \in V$:

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) + g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \lambda_1 g(v_1) + \lambda_2 g(v_2) \\ &= \lambda_1 \cdot (f+g)(v_1) + \lambda_2 \cdot (f+g)(v_2)\end{aligned}$$

 D.h. $f+g$ ist eine lineare Abbildung von V nach W, also gilt $f+g \in \mathrm{Hom}(V,W)$.
 Daraus folgt, dass (U2) erfüllt ist.
 - Es seien $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ und $\mu \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann gilt für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ und $v_1, v_2 \in V$:

$$\begin{aligned}(\mu f)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \mu \cdot f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \mu \cdot \lambda_1 \cdot f(v_1) + \mu \cdot \lambda_2 \cdot f(v_2) \\ &= \lambda_1 \cdot (\mu f)(v_1) + \lambda_2 \cdot (\mu f)(v_2)\end{aligned}$$

 D.h. μf ist eine lineare Abbildung von V nach W, also gilt $\mu f \in \mathrm{Hom}(V,W)$.
 Daraus folgt, dass (U3) erfüllt ist.

Aufgabe G2 (Kanonische Faktorisierung)
Es sei V ein Vektorraum. Wir betrachten die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned}\varphi_1 : V \to V, &\qquad v \mapsto v \text{ und} \\ \varphi_2 : V \to V, &\qquad v \mapsto 0\,.\end{aligned}$$

Aus Satz 5.2.5. (Kanonische Faktorisierung) ergibt sich die Existenz von zwei Isomorphismen $\overline{\varphi_1}$ und $\overline{\varphi_2}$, die durch φ_1 bzw. φ_2 eindeutig bestimmt sind.

(a) Geben Sie die Abbildungsvorschrift von $\overline{\varphi_1}$ und $\overline{\varphi_2}$ an.

(b) Die Isomorphie welcher Vektorräume kann man daraus schließen?

Lösung:

(a) Offensichtlich gilt $\ker \varphi_1 = \{0\}$, $\mathrm{im}\, \varphi_1 = V$, $\ker \varphi_2 = V$ und $\mathrm{im}\, \varphi_2 = \{0\}$. Aus Satz 5.2.5. ergeben sich direkt die Abbildungsvorschriften:

$$\begin{aligned}\overline{\varphi_1} : V/\{0\} \to V, &\qquad v + \{0\} \mapsto \varphi_1(v) = v \\ \overline{\varphi_2} : V/V \to \{0\}, &\qquad v + V \mapsto \varphi_2(v) = 0\,.\end{aligned}$$

(b) Es folgt, dass $V/\{0\}$ isomorph zu V ist und dass V/V isomorph zu $\{0\}$ ist.

Aufgabe G3 (Rang von Matrizen und Lösungen von Gleichungssystemen)
Gegeben seien die drei Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrizen A, B und C und die Dimension des Kerns der zu diesen Matrizen gehörigen linearen Abbildungen φ_A, φ_B und φ_C.

(b) Es sei D eine reelle $m \times n$-Matrix und $U := \ker \varphi_D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Dx = 0\}$ der Kern der zugehörigen linearen Abbildung. Zeigen Sie dass für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Dx = b$ entweder leer ist oder die Gestalt $a + U$ mit einem $a \in \mathbb{R}^n$ hat.

(c) Wir betrachten die linearen Gleichungssysteme $Ax = a$, $Bx = b$ und $Cx = c$. Ein solches lineares Gleichungssystem ist unlösbar oder es hat genau eine Lösung oder die Lösungsmenge ist eine Gerade, oder eine Ebene, oder ein dreidimensionales Gebilde, ...
Welche Fälle sind in obigen Gleichungssystemen jeweils möglich? Gib in den Fällen, die möglich sind, jeweils eine rechte Seite an, für die dieser Fall eintritt. Begründe in den übrigen Fällen, warum er jeweils nicht eintreten kann.

Lösung:

(a) Der Rang einer Matrix ergibt sich aus der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen. Das lässt sich hier jeweils direkt ablesen:

$$\operatorname{rank} A = 1, \operatorname{rank} B = 3, \operatorname{rang} C = 3$$

Durch Anwenden des Dimensionssatzes

$$\dim(\operatorname{im} \varphi) + \dim(\ker \varphi) = \dim V$$

für alle linearen Abbildungen $\varphi : V \to W$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\dim(\ker \varphi_A) &= 4 - \operatorname{rank} A = 4 - 1 = 3 \\ \dim(\ker \varphi_B) &= 4 - \operatorname{rank} B = 4 - 3 = 1 \\ \dim(\ker \varphi_C) &= 3 - \operatorname{rank} C = 3 - 3 = 0\,.\end{aligned}$$

(b) Entweder die Lösungsmenge ist leer, oder es gibt ein $a \in \mathbb{R}^n$ mit $Da = b$. Im ersten Fall ist nichts zu zeigen. Wir betrachten also den zweiten Fall.
Jedes Element aus $\mathbb{R}^n$ hat die Gestalt $a + x$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ und ist genau dann eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems, wenn

$$b = D(a + x) = Da + Dx = b + Dx \Leftrightarrow Dx = 0 \Leftrightarrow x \in U$$

gilt. D.h. die Lösungsmenge von $Dx = b$ hat die Gestalt $\{a + x \mid x \in U\} = a + U$.

w.z.b.w.

(c)
- Wegen (a) und (b) ist die Lösung das Systems $Ax = a$ entweder leer oder ein dreidimensionales Gebilde, da $\dim(\ker \varphi_A) = 3$ gilt. Das System ist allerdings für jede rechte Seite lösbar:

  $$Ax = b \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 + 3x_4 = b$$

  ist zum Beispiel für $x = (b, 0, 17, 0)^T$ erfüllt. Damit kann nur der Fall eintreten, dass die Lösungsmenge etwas dreidimensionales ist.
- Wegen (a) und (b) ist die Lösung das Systems $Bx = b$ entweder leer oder eine Gerade, denn es gilt $\dim(\ker \varphi_B) = 1$. Beide Fälle treten auf, so ist das System für $b = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ lösbar (eine Lösung ist $x = (0, 0, 0, 0)^T$) und für $b = (0, 0, 0, 0, 1)^T$ unlösbar, denn aus der letzten Zeile des LGS ergibt sich dann $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$.
- Wegen (a) und (b) ist das System entweder unlösbar oder eindeutig lösbar, denn $\ker(\varphi_C) = \{0\}$. Unlösbarkeit kann jedoch wieder nicht auftreten, denn wegen $\dim(\operatorname{im} \varphi_C) = \operatorname{rank} C = 3$ liegt jedes Element aus $\mathbb{R}^3$ im Bild von φ_C. Das bedeutet, das lineare Gleichungssystem $Cx = c$ ist für alle $c \in \mathbb{R}^3$ lösbar.

Aufgabe G4 (Rang *)
(*) Es seien A und B reelle $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie dass

$$\operatorname{rank} AB \le \operatorname{rank} B$$

gilt.

Lösung: Wir betrachten die drei Abbildungen

$$\begin{aligned}\varphi_A &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, & x &\mapsto Ax\,, \\ \varphi_B &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, & x &\mapsto Bx \text{ und} \\ \varphi_{AB} &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, & x &\mapsto ABx\,.\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$.
Des Weiteren gilt für jede lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ bekanntermaßen $\dim(\ker \varphi) + \dim(\operatorname{im} \varphi) = \dim V$ und damit insbesondere $\dim(\operatorname{im} \varphi) \le \dim V$.
Zusammen ergibt sich

$$\operatorname{rank}(AB) = \dim(\operatorname{im} \varphi_{AB}) = \dim(\operatorname{im} \varphi_A \circ \varphi_B) = \dim\left(\operatorname{im}(\varphi_A|_{\operatorname{im} \varphi_B})\right) \le \dim(\operatorname{im} \varphi_B) = \operatorname{rank} B\,.$$

w.z.b.w.