Lineare Algebra I
12. Tutorium
Vektorräume und Rang von Matrizen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
17. Januar 2011

Aufgaben

Aufgabe G1 (Vektorräume)
Es seien M eine beliebige Menge und V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{F}(M, W)$ der Abbildungen von M nach W mit den üblichen Operationen

$$\begin{array}{llll} + : \mathcal{F}(M,W) \times \mathcal{F}(M,W) \to \mathcal{F}(M,W), & (f,g) \mapsto f+g & \text{mit} & (f+g)(x) := f(x) + g(x)\, \forall x \in M \text{ und} \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{F}(M,W) \to \mathcal{F}(M,W), & (\lambda, g) \mapsto \lambda g & \text{mit} & (\lambda g)(x) := \lambda \cdot g(x)\, \forall x \in M \end{array}$$

einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bildet.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Hom}(V, W)$ aller linearen Abbildungen von V nach W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist, indem sie zeigen, dass es sich bei $\mathrm{Hom}(V, W)$ um einen Untervektorraum von $\mathcal{F}(V, W)$ handelt.

Aufgabe G2 (Kanonische Faktorisierung)
Es sei V ein Vektorraum. Wir betrachten die linearen Abbildungen

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 : V \to V, & v \mapsto v \text{ und} \\ \varphi_2 : V \to V, & v \mapsto 0\,. \end{array}$$

Aus Satz 5.2.5. (Kanonische Faktorisierung) ergibt sich die Existenz von zwei Isomorphismen $\overline{\varphi_1}$ und $\overline{\varphi_2}$, die durch φ_1 bzw. φ_2 eindeutig bestimmt sind.

(a) Geben Sie die Abbildungsvorschrift von $\overline{\varphi_1}$ und $\overline{\varphi_2}$ an.

(b) Die Isomorphie welcher Vektorräume kann man daraus schließen?

Aufgabe G3 (Rang von Matrizen und Lösungen von Gleichungssystemen)
Gegeben seien die drei Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrizen A, B und C und die Dimension des Kerns der zu diesen Matrizen gehörigen linearen Abbildungen φ_A, φ_B und φ_C.

(b) Es sei D eine reelle $m \times n$-Matrix und $U := \ker \varphi_D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Dx = 0\}$ der Kern der zugehörigen linearen Abbildung. Zeigen Sie dass für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Dx = b$ entweder leer ist oder die Gestalt $a + U$ mit einem $a \in \mathbb{R}^n$ hat.

(c) Wir betrachten die linearen Gleichungssysteme $Ax = a$, $Bx = b$ und $Cx = c$. Ein solches lineares Gleichungssystem ist unlösbar oder es hat genau eine Lösung oder die Lösungsmenge ist eine Gerade, oder eine Ebene, oder ein dreidimensionales Gebilde, ...

Welche Fälle sind in obigen Gleichungssystemen jeweils möglich? Gib in den Fällen, die möglich sind, jeweils eine rechte Seite an, für die dieser Fall eintritt. Begründe in den übrigen Fällen, warum er jeweils nicht eintreten kann.

Aufgabe G4 (Rang *)

(*) Es seien A und B reelle $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie dass

$$\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$$

gilt.