Lineare Algebra I
11. Tutorium
Matrizenrechnung und Homomorphiesatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
10. Januar 2011

Aufgaben

Aufgabe G1 (Elementarmatrizen)
Wir betrachten in dieser Aufgabe Matrizen aus $M_{n,n}(\mathbb{R})$. Es sei E die Einheitsmatrix in $M_{n,n}(\mathbb{R})$ und E_{ij} mit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ die aus der Vorlesung bekannten Matrizen in $M_{n,n}(\mathbb{R})$ welche eine Eins als Eintrag an der Schnittstelle von i-ter Zeile und j-ter Spalte hat, während alle anderen Einträge Null sind.
Außerdem betrachten wir die Matrizen

$$Q_{ij} := E + E_{ij} \; \forall \, i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } i \neq j \, .$$

Des Weiteren sei

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine beliebige Matrix in $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

(a) Berechnen Sie die Matrizen $Q_{ij} \cdot A$ und $A \cdot Q_{ij}$.

(b) Beschreiben Sie wie die Matrizen $Q_{ij} \cdot A$ und $A \cdot Q_{ij}$ aus A entstehen.
Hinweis: Dies sollte durch die Angabe von Zeilen- oder Spaltenoperationen geschehen, die man auf A anwenden muss um die angegebenen Produkte zu erhalten.

(c) Führen Sie (b) noch einmal mit den Matrizen der Gestalt

$$E + \lambda E_{ij}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } i \neq j$$

anstelle von Q_{ij} durch.

(d) Was ist die Inverse Matrix von Q_{ij}?

(e) Stelllen Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

als Produkt von Matrizen der Gestalt Q_{ij} mit $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ dar.

Lösung:

(a) Durch Matrizenmultiplikation erhält man einfach

$$Q_{ij} \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)\,1} & a_{(i-1)\,2} & \cdots & a_{(i-1)\,n} \\ a_{i1} + a_{j1} & a_{i2} + a_{j2} & \cdots & a_{in} + a_{jn} \\ a_{(i+1)\,1} & a_{(i+1)\,2} & \cdots & a_{(i+1)\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

und

$$A \cdot Q_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,(j-1)} & a_{1i} + a_{1j} & a_{1\,(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,(j-1)} & a_{2i} + a_{2j} & a_{2\,(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,(j-1)} & a_{ni} + a_{nj} & a_{n\,(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(b) $Q_{ij} \cdot A$ entsteht aus A durch die Addition der j-ten Zeile von A zur i-ten Zeile von A.
$A \cdot Q_{ij}$ entsteht aus A durch die Addition der i-ten Spalte von A zur j-ten Spalte von A.

(c) Analog zu (a) und (b) ergibt sich:
$(E + \lambda E_{ij}) \cdot A$ entsteht aus A durch die Addition des λ- fachen der j-ten Zeile von A zur i-ten Zeile von A.
$A \cdot (E + \lambda E_{ij})$ entsteht aus A durch die Addition des λ-fachen der i-ten Spalte von A zur j-ten Spalte von A.

(d) Man kann die Beschreibungen aus (b) und (c) nutzen um festzustellen, dass

$$Q_{ij}^{-1} = E - E_{ij}$$

ist, denn es gilt:
$Q_{ij} \cdot (E - E_{ij})$ entsteht aus Q_{ij} durch Subtrahieren der i-ten Spalte von Q_{ij} von der j-ten Spalte von Q_{ij}. Dabei entsteht offensichtlich die Einheitsmatrix E.
Analog erhält man $(E - E_{ij}) \cdot Q_{ij} = E$.

(e) Mit Hilfe der Beschreibungen der Matrizen in (c) und (d) kann die hier gegebene Matrix wie folgt umformen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{Q_{21}^{-1}\cdot}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{Q_{31}^{-1}\cdot}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{Q_{32}^{-1}\cdot}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{Q_{23}^{-1}\cdot}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{Q_{13}^{-1}\cdot}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die letzte Matrix ist gerade Q_{12} und so ergibt sich $Q_{13}^{-1} \cdot Q_{23}^{-1} \cdot Q_{32}^{-1} \cdot Q_{31}^{-1} \cdot Q_{21}^{-1} \cdot A = Q_{12}$. D.h. es folgt

$$A = Q_{21} \cdot Q_{31} \cdot Q_{32} \cdot Q_{23} \cdot Q_{13} \cdot Q_{12}\,.$$

Aufgabe G2 (Dimension)

(a) Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeigen Sie:

$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W\,.$$

(b) Es seien U_1 und U_2 Untervektorräume eines endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Zeigen Sie die bekannte Dimensionsformel

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2\,,$$

indem Sie nur Aufgabenteil (a) und die bekannte Dimensionsformel

$$\dim(\operatorname{im}\varphi) + \dim(\ker\varphi) = \dim U$$

für alle linearen Abbildungen $\varphi : U \to V$ zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen U und V.

Lösung:

(a) Es seien $M_1 := \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ eine Basis von V und $M_2 := \{w_1, \dots, w_m\} \subset W$ eine Basis von W. Dann gilt

$$\dim V = n \quad \text{und} \quad \dim W = m\,.$$

Wir zeigen nun, dass die Mengen $M := \{(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_m)\}$ eine Basis von $V \times W$ ist.

- Für $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$ mit

$$\lambda_1(v_1, 0) + \ldots + \lambda_n(v_n, 0) + \mu_1(0, w_1) + \ldots + \mu_m(0, w_m) = 0$$

gilt auch

$$0 = (0, 0) = (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n, \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m)$$

Daraus folgt

$$0 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \quad \text{und} \quad 0 = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m\,.$$

Da die Mengen M_1 bzw. M_2 linear unabhängig sind, ergibt sich

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \mu_1 = \ldots = \mu_m = 0\,.$$

D.h. M ist linear unabhängig.

- Ein beliebiges Element aus $V \times W$ hat die Gestalt (v, w) mit $v \in V$ und $w \in W$. Da M_1 bzw. M_2 die Vektorräume V bzw. W erzeugen gibt es Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1 \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$ mit

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \quad \text{und} \quad w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m\,.$$

Daraus ergibt sich

$$(v, w) = (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n, \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m) = \lambda_1(v_1, 0) + \ldots + \lambda_n(v_n, 0) + \mu_1(0, w_1) + \ldots + \mu_m(0, w_m)\,.$$

D.h. die Menge M erzeugt $V \times W$.

Es ist also gezeigt, dass M eine Basis von $V \times W$ ist. D.h. die Anzahl der Elemente von M ist gleich der Dimension von $V \times W$, es gilt also

$$\dim(V \times W) = n + m = \dim V + \dim W\,.$$

w.z.b.w.

(b) Man betrachte die Abbildung

$$\varphi : U_1 \times U_2 \to V, \qquad (v, w) \mapsto v + w\,.$$

Für $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in U_1 \times U_2$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1(v_1, w_1) + \lambda_2(v_2, w_2)) &= \varphi((\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \\ &= \lambda_1(v_1 + w_1) + \lambda_2(v_2 + w_2) = \lambda_1 \varphi((v_1, w_1)) + \lambda_2 \varphi((v_2, w_2))\,. \end{aligned}$$

D.h. φ ist eine lineare Abbildung und man kann die gegebene Dimensionsformel auf φ anwenden.

im φ ist offensichtlich gleich $U_1 + U_2$.

Der Kern von φ besteht aus den Elementen $(v, -v) \in V \times W$, d.h. den Elementen $(v, -v)$ mit $v \in U_1 \cap U_2$. Man sieht leicht, dass die Abbildung

$$\chi : \ker \varphi \to U_1 \cap U_2, \qquad (v, -v) \mapsto v$$

ein Vektorraumisomorphismus ist. Da Vektorraumisomorphismen Basen wieder auf Basen abbilden, gilt also

$$\dim(\ker \varphi) = \dim(U_1 \cap U_2)\,.$$

Mit Hilfe von Teilaufgabe (a) und der gegebenen Dimensionsformel folgt also

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 \times U_2) = \dim(\operatorname{im} \varphi) + \dim(\ker \varphi) = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2)\,.$$

w.z.b.w.

Aufgabe G3 (Homomorphiesatz)
Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Außerdem sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $U \subseteq \ker \varphi$.
Nach dem Homomorphiesatz existiert dann eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\widetilde{\varphi} : V/U \to W$ mit

$$\varphi = \widetilde{\varphi} \circ q \,,$$

wobei $q : V \to V/U$ die bekannte Quotientenabbildung ist.

(a) Zeigen Sie
$$\ker \widetilde{\varphi} = (\ker \varphi)/U \,.$$
Machen Sie sich dazu als ersten Schritt klar, dass $(\ker \varphi)/U$ existiert und ein Untervektorraum von V/U ist.

(b) Zeigen Sie
$$\operatorname{im} \widetilde{\varphi} = \operatorname{im} \varphi \,.$$

(c) (*) Zeigen Sie:
Wenn φ surjektiv und $\ker \varphi = U$ ist, dann ist $\widetilde{\varphi}$ ein Isomorphismus.

Lösung:

(a) Da U und $\ker \varphi$ Untervektorräume von V und damit selbst Vektorräume sind und da $U \subseteq \ker \varphi$ gilt, existiert $(\ker \varphi)/U$. Man kann ihn in folgender Weise als Untervektorraum von V/U verstehen:

$$(\ker \varphi)/U = \{v + U \mid v \in \ker \varphi\} \overset{\text{da } \ker \varphi \subseteq V}{\subseteq} \{v + U \mid v \in V\} = V/U \,.$$

Es sei $v + U$ ein beliebiges Element aus V/U. Dann gilt

$$\widetilde{\varphi}(v + U) = \widetilde{\varphi}(p(v)) = (\widetilde{\varphi} \circ p)(v) \overset{\varphi = \widetilde{\varphi} \circ q}{=} \varphi(v) \,.$$

D.h.

$$v + U \in \ker \widetilde{\varphi} \Leftrightarrow \widetilde{\varphi}(v + U) = 0 \Leftrightarrow \varphi(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \ker \varphi \Leftrightarrow v + U \in (\ker \varphi)/U \,.$$

Daraus folgt

$$\ker \widetilde{\varphi} = (\ker \varphi)/U \,.$$

w.z.b.w.

(b) Man verwendet wieder die Gleichung $\widetilde{\varphi}(v + U) = \varphi(v)$ für alle $v \in V$ (siehe letzter Aufgabenteil) und erhält

$$w \in \operatorname{im} \varphi \Leftrightarrow \exists v \in V \text{ mit } w = \varphi(v) = \widetilde{\varphi}(v + U) \Leftrightarrow \exists v + U \in V/U \text{ mit } w = \widetilde{\varphi}(v + U) \Leftrightarrow w \in \operatorname{im} \widetilde{\varphi} \,.$$

D.h. es gilt

$$\operatorname{im} \widetilde{\varphi} = \operatorname{im} \varphi \,.$$

w.z.b.w.

(c) Da $\widetilde{\varphi}$ eine lineare Abbildung ist, muss man nur zeigen, dass sie bijektiv ist.
Da φ surjektiv ist, gilt $\operatorname{im} \varphi = W$. Aus Aufgabenteil (b) folgt dann

$$\operatorname{im} \widetilde{\varphi} = \operatorname{im} \varphi = W$$

und damit ist auch $\widetilde{\varphi}$ surjektiv.
Aus Aufgabenteil (a) folgt

$$\ker \widetilde{\varphi} = (\ker \varphi)/U = U/U = \{0 + U\} \,.$$

D.h. $\widetilde{\varphi}$ ist injektiv.
Insgesamt folgt, dass $\widetilde{\varphi}$ linear und bijektiv ist und damit auch ein Vektorraumisomorphismus.

w.z.b.w.