# Lineare Algebra I
# 11. Tutorium
# Matrizenrechnung und Homomorphiesatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Kollross**
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

**WS 2010/2011**
**10. Januar 2011**

## Aufgaben

**Aufgabe G1** (Elementarmatrizen)
Wir betrachten in dieser Aufgabe Matrizen aus $M_{n,n}(\mathbb{R})$. Es sei $E$ die Einheitsmatrix in $M_{n,n}(\mathbb{R})$ und $E_{ij}$ mit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ die aus der Vorlesung bekannten Matrizen in $M_{n,n}(\mathbb{R})$ welche eine Eins als Eintrag an der Schnittstelle von $i$-ter Zeile und $j$-ter Spalte hat, während alle anderen Einträge Null sind.
Außerdem betrachten wir die Matrizen

$$Q_{ij} := E + E_{ij} \; \forall \, i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } i \neq j \, .$$

Des Weiteren sei

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine beliebige Matrix in $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

(a) Berechnen Sie die Matrizen $Q_{ij} \cdot A$ und $A \cdot Q_{ij}$.

(b) Beschreiben Sie wie die Matrizen $Q_{ij} \cdot A$ und $A \cdot Q_{ij}$ aus $A$ entstehen.
Hinweis: Dies sollte durch die Angabe von Zeilen- oder Spaltenoperationen geschehen, die man auf $A$ anwenden muss um die angegebenen Produkte zu erhalten.

(c) Führen Sie (b) noch einmal mit den Matrizen der Gestalt

$$E + \lambda E_{ij}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } i \neq j$$

anstelle von $Q_{ij}$ durch.

(d) Was ist die Inverse Matrix von $Q_{ij}$?

(e) Stelllen Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

als Produkt von Matrizen der Gestalt $Q_{ij}$ mit $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ dar.

**Aufgabe G2** (Dimension)

(a) Es seien $V$ und $W$ endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeigen Sie:

$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W \, .$$

(b) Es seien $U_1$ und $U_2$ Untervektorräume eines endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums $V$. Zeigen Sie die bekannte Dimensionsformel

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 ,$$

indem Sie nur Aufgabenteil (a) und die bekannte Dimensionsformel

$$\dim(\operatorname{im} \varphi) + \dim(\ker \varphi) = \dim U$$

für alle linearen Abbildungen $\varphi : U \to V$ zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen $U$ und $V$.

**Aufgabe G3** (Homomorphiesatz)
Es seien $V$ und $W$ $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Außerdem sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $U \subseteq \ker \varphi$.
Nach dem Homomorphiesatz existiert dann eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\widetilde{\varphi} : V/U \to W$ mit

$$\varphi = \widetilde{\varphi} \circ q ,$$

wobei $q : V \to V/U$ die bekannte Quotientenabbildung ist.

(a) Zeigen Sie

$$\ker \widetilde{\varphi} = (\ker \varphi)/U .$$

Machen Sie sich dazu als ersten Schritt klar, dass $(\ker \varphi)/U$ existiert und ein Untervektorraum von $V/U$ ist.

(b) Zeigen Sie

$$\operatorname{im} \widetilde{\varphi} = \operatorname{im} \varphi .$$

(c) (*) Zeigen Sie:
Wenn $\varphi$ surjektiv und $\ker \varphi = U$ ist, dann ist $\widetilde{\varphi}$ ein Isomorphismus.