Lineare Algebra I
10. Tutorium
Lineare Abbildungen und Quotientenräume

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
10. Januar 2011

Aufgaben

Aufgabe G1 (Injektivität und Surjektivität)
Es seien V und W endlichdimensionale Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Ersetzen Sie in den folgenden drei Aussagen die Fragezeichen so, dass die Aussagen wahr sind.

(a) φ ist surjektiv $\Leftrightarrow \dim(\operatorname{im}\varphi) = ?$

(b) φ ist injektiv $\Leftrightarrow \dim(\ker\varphi) = ?$

(c) φ ist bijektiv $\Leftrightarrow \dim V = ?$ und $\dim(\ker\varphi) = ?$

Beweisen Sie jeweils die Richtigkeit ihrer Aussagen.
Betrachten Sie nun den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, a_n \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$ der reellen Zahlenfolgen (siehe Aufgabe G3 Übungsblatt 9).

(d) Zeigen Sie dass es eine lineare Abbildung $\varphi_1 : V \to V$ gibt, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(e) Zeigen Sie dass es eine lineare Abbildung $\varphi_2 : V \to V$ gibt, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Lösung:

(a) Es gilt: φ ist surjektiv $\Leftrightarrow \dim(\operatorname{im}\varphi) = \dim W$.
Beweis:
- Angenommen φ ist surjektiv, dann gilt nach Definition $\operatorname{im}\varphi = W$ und damit auch $\dim(\operatorname{im}\varphi) = \dim W$
- Angenommen es gilt $\dim(\operatorname{im}\varphi) = \dim W$. Aus Satz 4.6.13. aus der Vorlesung folgt dann $\operatorname{im}\varphi = W$, d.h. φ ist surjektiv.

(b) φ ist injektiv $\Leftrightarrow \dim(\ker\varphi) = 0$.
Dies folgt sofort aus den bekannten Aussagen (siehe frühere Übungsaufgaben):

$$\begin{aligned} \varphi \text{ ist injektiv} &\Leftrightarrow \ker\varphi = \{0\} \text{ und} \\ \dim U = 0 &\Leftrightarrow U = \{0\} \end{aligned}$$

für alle Vektorräume U.

(c) φ ist bijektiv $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$ und $\dim(\ker\varphi) = 0$
Beweis:
Mit Hilfe der bekannten Dimensionsformel $\dim(\operatorname{im}\varphi) + \dim(\ker\varphi) = \dim V$ und den Aufgabenteilen (a) und (b) ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi \text{ ist bijektiv} &\Leftrightarrow \varphi \text{ ist injektiv und surjektiv} \Leftrightarrow \dim(\ker\varphi) = 0 \text{ und } \dim(\operatorname{im}\varphi) = \dim W \\ &\Leftrightarrow \dim V = \dim W \text{ und } \dim(\ker\varphi) = 0 \end{aligned}$$

(d) Wir betrachten die Abbildung $\varphi_1 : V \to V$, die definiert ist durch

$$\varphi_1\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } b_1 = 0, b_{i+1} = a_i\ \forall i \in \mathbb{N}\,.$$

Diese Abbildung verschiebt die Folgenglieder um eins nach hinten und ergänzt eine Null als erstes Folgenglied. D.h. φ_1 ist injektiv, denn wenn man zwei verschiedene Zahlenfolgen verschiebt, so sind die Bilder verschieden.
φ_1 ist nicht surjektiv, da jede Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 \neq 0$ nicht im Bild von φ_1 liegt.

(e) Wir betrachten die Abbildung $\varphi_2 : V \to V$, die definiert ist durch

$$\varphi_2\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } b_i = a_{i+1}\ \forall i \in \mathbb{N}\,.$$

Diese Abbildung verschiebt die Folgenglieder um eins nach vorn und "vergisst" das erste Folgenglied. D.h. φ_1 ist surjektiv, denn für eine beliebige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$ gilt für $b_1 := 0, b_{n+1} := a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$: $\varphi_2\left((b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
φ_2 ist nicht injektiv, denn für $a_n := 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $b_1 := 1, b_{n+1} := 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\varphi_2\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \varphi_2\left((b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Aufgabe G2 (Rang)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto Ax\,.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der Abbildung φ.

(b) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A (d.h. die Anzahl der Pivotelemente im zugehörigen linearen Gleichungssystem $Ax = 0$).

(c) Betrachten Sie die Spaltenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der Matrix A. Wie groß ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in der Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$?

(d) Betrachten Sie die Zeilenvektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der Matrix A. Wie groß ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in der Menge $\{w_1, w_2, w_3\}$?

Lösung:

(a) Für $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = (x_1 + 2x_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x_3 - x_2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D.h. $\operatorname{im}\varphi \subseteq \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Andererseits erhält man aus obiger Gleichung auch

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}\right)\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\,.$$

D.h. es gilt auch $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\subseteq \operatorname{im}\varphi$. Insgesamt ist also

$$\operatorname{im}\varphi = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Für $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{ folgt } \lambda_1=\lambda_2=0\,.$$

D.h. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig und damit eine Basis von $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\operatorname{im}\varphi$.

Nach Definition ist der Rang der Abbildung φ also zwei.

(b) Die Umformung des Gleichungssystems mit Hilfe des Gaußalgorithmus ist die folgende.

$$Ax=0 \Longleftrightarrow \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 0\cdot x_3 & = & 0\\ x_1 & + & 2x_2 & + & 0\cdot x_3 & = & 0\\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0\end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & & & = & 0\\ & - & x_2 & + & x_3 & = & 0\\ & & & & 0 & = & 0\end{array}$$

D.h. die Anzahl der Pivotelemente und damit der Rang von A ist zwei.

(c) Die Vektoren v_1,v_2,v_3 sind linear abhängig, denn es gilt

$$2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\,.$$

Wie in Aufgabenteil (a) gezeigt wurde sind die Vektoren v_1,v_3 linear unabhängig.
D.h. die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in der Menge $\{v_1,v_2,v_3\}$ ist zwei.

(d) Die Vektoren w_1,w_2,w_3 sind linear abhängig, denn es gilt

$$1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\,.$$

Außerdem sind die Vektoren w_1,w_3 linear unabhängig, denn für $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ mit

$$0=\lambda_1w_1+\lambda_2w_3=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\text{ folgt } \lambda_2=0 \text{ und } \lambda_1=0\,.$$

D.h. die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in der Menge $\{w_1,w_2,w_3\}$ ist zwei.

Aufgabe G3 (Quotientenraum)

Wir betrachten den Vektorraum $V=\mathbb{R}^2$ und den Untervektorraum $U:=\left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\,\middle|\,\lambda\in\mathbb{R}\right\}$.

(a) Zeichnen sie U und die affinen Unterräume $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+U$, $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+U$ und $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+U$.

(b) Zeigen Sie, dass für $a,b\in\mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+U=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\,\middle|\,x,y\in\mathbb{R},x+y=a+b\right\}.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : V/U \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U \mapsto a + b$$

wohldefiniert und sogar ein Vektorraumisomorphismus ist.

(d) Geben Sie eine graphische Interpretation der Abbildung φ aus dem letzten Aufgabenteil an.

(e) Ist die Abbildung

$$\chi : V/U \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U \to a \cdot b$$

wohldefiniert? Zeigen Sie ihre Behauptung.

Lösung:

(a) Im $\mathbb{R}^2$ ist U eine Gerade durch den Ursprung mit Anstieg -1.
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U$ ist die zu U parallele Gerade, die die y-Achse in 1 schneidet.
$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + U$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + U$ sind gleich. Es handelt sich bei ihnen um die zu U parallele Gerade, die die $y-$Achse in 2 schneidet.

(b) Ein Element $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aus $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U$ hat nach Definition die Gestalt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\lambda \\ b-\lambda \end{pmatrix}$$

mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$. D.h. es folgt insbesondere $x + y = a + \lambda + b - \lambda = a + b$. Also ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}, x + y = a + b \right\}$$

und daraus folgt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}, x + y = a + b \right\}.$$

Andererseits gilt für ein Element $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}, x + y = a + b \right\}$ auch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-a \\ -(x-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + (x-a) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U.$$

D.h. es gilt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}, x + y = a + b \right\}.$$

Insgesamt ergibt sich dann

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}, x + y = a + b \right\}.$$

w.z.b.w.

(c) • Für $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} + U$$

folgt $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}, x + y = a + b \right\}$ und damit

$$a' + b' = a + b$$

und

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} + U\right) = a + b\,.$$

D.h. die Abbildungsvorschrift von φ ist unabhängig von Wahl des Repräsentanten der affinen Unterräume. φ ist also wohldefiniert.

• Für $a_1, b_1, a_2, b_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\lambda_1\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + U\right) + \lambda_2\left(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + U\right)\right) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \end{pmatrix} + U\right) \\
&= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\
&= \lambda_1(a_1 + b_1) + \lambda_2(a_2 + b_2) \\
&= \lambda_1 \varphi\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + U\right) + \lambda_2 \varphi\left(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + U\right)
\end{aligned}$$

D.h. φ ist linear.

• Für $x \in \mathbb{R}$ beliebig gilt

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + U\right) = x + 0 = x\,.$$

D.h. φ ist surjektiv.

• $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ist genau dann in $\ker\varphi$, wenn $a + b = 0$ gilt, d.h. wenn

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}, x + y = 0 \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + U$$

ist. Es folgt also

$$\ker\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + U \right\} = \{0\}\,,$$

wobei die letzte Null das Nullelement in V/U bezeichnet.
D.h. φ ist injektiv.

Insgesamt ist φ also eine wohldefinierte, bijektive, lineare Abbildung, also ein Vektorraumisomorphismus.

w.z.b.w.

(d) Eine mögliche Interpretation ist folgende:
Man kann $\mathbb{R}$ mit der y-Achse im $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Dann bildet die Abbildung φ einen affinen Unterraum (der ja eine zu U parallele Gerade ist) auf dessen Schnittpunkt mit der y-Achse ab.

(e) Wegen $U \ni \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + U\,.$$

Nach der angegebenen Abbildungsvorschrift ist aber

$$\chi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + U\right) = 1 \cdot (-1) = -1 \neq 0 = 0 \cdot 0 = \chi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + U\right)\,.$$

D.h. χ bildet dasselbe Element aus V/U in zwei verschiedene Elemente aus $\mathbb{R}$ ab, was natürlich nicht möglich ist.
D.h. χ ist nicht wohldefiniert.

Aufgabe G4 (Quotientenraum*)
(*) Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Weiterhin sei $u_1, \ldots, u_m$ eine Basis von U.
Dann gibt es nach dem Basisergänzungssatz ein $n \in \mathbb{N}_0$ und Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$, so dass $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist.
Zeigen Sie, dass in dieser Situation die Elemente $v_1 + U, \ldots, v_n + U$ eine Basis von V/U bilden.

Lösung:

- Es sei $v + U$ ein beliebiges Element aus V/U. Dann ist $v \in V$ und da $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist, gibt es Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ mit

  $$v = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n \, .$$

  Wegen $v - (\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n) = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m \in U$ folgt

  $$v + U = (\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n) + U = \mu_1(v_1 + U) + \ldots + \mu_n(v_n + U) \, .$$

  D.h. die Vektoren $v_1 + U, \ldots, v_n + U$ erzeugen V/U.

- Seien nun $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ mit

  $$0 + U = \mu_1(v_1 + U) + \ldots + \mu_n(v_n + U) = (\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n) + U \, .$$

  Insbesondere gilt also $0 \in (\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n) + U$. D.h. es existiert ein $u \in U$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit

  $$0 = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n + u = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n + \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m \, .$$

  Da $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, folgt daraus

  $$\mu_1 = \ldots = \mu_n = 0 \, .$$

  D.h. die Vektoren $v_1 + U, \ldots, v_n + U$ sind linear unabhängig.

Insgesamt folgt, dass die Vektoren $v_1 + U, \ldots, v_n + U$ eine Basis von V/U bilden.

w.z.b.w.