Lineare Algebra I
10. Tutorium
Lineare Abbildungen und Quotientenräume

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
10. Januar 2011

Aufgaben

Aufgabe G1 (Injektivität und Surjektivität)
Es seien V und W endlichdimensionale Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Ersetzen Sie in den folgenden drei Aussagen die Fragezeichen so, dass die Aussagen wahr sind.

(a) φ ist surjektiv $\Leftrightarrow \dim(\operatorname{im}\varphi) = ?$

(b) φ ist injektiv $\Leftrightarrow \dim(\ker\varphi) =?$

(c) φ ist bijektiv $\Leftrightarrow \dim V =?$ und $\dim(\ker\varphi) =?$

Beweisen Sie jeweils die Richtigkeit ihrer Aussagen.
Betrachten Sie nun den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, a_n \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$ der reellen Zahlenfolgen (siehe Aufgabe G3 Übungsblatt 9).

(d) Zeigen Sie dass es eine lineare Abbildung $\varphi_1 : V \to V$ gibt, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(e) Zeigen Sie dass es eine lineare Abbildung $\varphi_2 : V \to V$ gibt, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe G2 (Rang)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto Ax\,.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der Abbildung φ.

(b) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A (d.h. die Anzahl der Pivotelemente im zugehörigen linearen Gleichungssystem $Ax = 0$).

(c) Betrachten Sie die Spaltenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der Matrix A. Wie groß ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in der Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$?

(d) Betrachten Sie die Zeilenvektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der Matrix A. Wie groß ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in der Menge $\{w_1, w_2, w_3\}$?

Aufgabe G3 (Quotientenraum)

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ und den Untervektorraum $U := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

(a) Zeichnen sie U und die affinen Unterräume $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + U$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + U$.

(b) Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R}, x + y = a + b \right\}.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : V/U \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U \mapsto a + b$$

wohldefiniert und sogar ein Vektorraumisomorphismus ist.

(d) Geben Sie eine graphische Interpretation der Abbildung φ aus dem letzten Aufgabenteil an.

(e) Ist die Abbildung

$$\chi : V/U \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U \to a \cdot b$$

wohldefiniert? Zeigen Sie ihre Behauptung.

Aufgabe G4 (Quotientenraum*)

(*) Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Weiterhin sei $u_1, \ldots, u_m$ eine Basis von U.

Dann gibt es nach dem Basisergänzungssatz ein $n \in \mathbb{N}_0$ und Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$, so dass $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist.

Zeigen Sie, dass in dieser Situation die Elemente $v_1 + U, \ldots, v_n + U$ eine Basis von V/U bilden.