Lineare Algebra I
9. Tutorium
Basis und Dimension

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
10. Dezember 2010

Aufgaben

Aufgabe G1 (Dimension)
Gibt es Untervektorräume U und V von $\mathbb{R}^6$ mit

$$\dim U = 5, \quad \dim V = 4 \quad \text{und} \quad \dim(U \cap V) = 2\,?$$

Beweisen Sie ihre Antwort.

Lösung: Gäbe es Untervektorräume mit den geforderten Eigenschaften, so würde

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 5 + 4 - 2 = 7$$

gelten. Da $U + V$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^6$ ist, gilt aber

$$\dim(U+V) \leq \dim \mathbb{R}^6 = 6\,.$$

Dies ist ein Widerspruch.
Es gibt also keine Untervektorräume U und V mit den in der Aufgabe geforderten Eigenschaften.

Aufgabe G2
Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $B = (e_1, e_2, e_3)$ und zwei weiteren Basen $B' = (b_1, b_2, b_3)$ und $B'' = (c_1, c_2, c_3)$, wobei

$$\begin{aligned}
e_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & e_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & e_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
b_1 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & b_2 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & b_3 &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
c_1 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, & c_2 &:= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, & c_3 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(a) Der Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ sei bezüglich der Basis B' gegeben durch $[w]_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten von w bezüglich der Basis B.

(b) Der Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ sei bezüglich der Standardbasis B gegeben durch $[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten von v bezüglich der Basis B'.

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten von b_1, b_2, b_3 bezüglich der Basis B'.

(d) Bestimme eine Matrix A_1 mit

$$[u]_B = A_1 [u]_{B'} \ \forall u \in \mathbb{R}^3 .$$

(e) Bestimme eine Matrix A_2 mit

$$[u]_{B'} = A_2 [u]_{B''} \ \forall u \in \mathbb{R}^3 .$$

Lösung:

(a) Es gilt

$$w = 3b_1 + 2b_2 + b_3 = 3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix} = 5e_1 + 3e_2 + 4e_3 .$$

Die Koordinaten von w bezüglich B sind also

$$[w]_B = \begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix} .$$

(b) Die Koordinaten bzgl. B' haben die Gestalt $[v]_{B'} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}$ mit

$$v = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 .$$

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 2\\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 2\\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 2 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 2\\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 2\\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 2 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 2\\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 2\\ & & & & 2\lambda_3 & = & 2 \end{array}$$

Aus dem letzten Gleichungssystem ergibt sich nacheinander $\lambda_3 = 1, \lambda_2 = 1$ und $\lambda_1 = 1$. D.h. die Koordinaten von v bezüglich B' sind

$$[v]_{B'} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} .$$

(c) Es gilt

$$b_1 = 1\cdot b_1 + 0\cdot b_2 + 0\cdot b_3 , \quad b_2 = 0\cdot b_1 + 1\cdot b_2 + 0\cdot b_3 \ \text{ und } \ b_3 = 0\cdot b_1 + 0\cdot b_2 + 1\cdot b_3 .$$

Für die Koordinaten bzgl. B' ergibt sich also

$$[b_1]_{B'} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} , \quad [b_2]_{B'} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} , \quad [b_3]_{B'} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} .$$

(d) Es seien $[u]_{B'} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}$ die Koordinaten von u bezüglich der Basis B'. Dann gilt

$$u = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = \begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2\\\lambda_2+\lambda_3\\\lambda_1+\lambda_3\end{pmatrix} = (\lambda_1+\lambda_2)e_1 + (\lambda_2+\lambda_3)e_2 + (\lambda_1+\lambda_3)e_3 .$$

Die Koordinaten bzgl. der Basis B haben dann also die Gestalt

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} [u]_{B'} .$$

D.h. die gesuchte Matrix ist

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und hat als Spalten die Vektoren b_1, b_2 und b_3.

(e) Es sei $[u]_{B''} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ die Koordinaten von u bezüglich der Basis B''. Dann gilt

$$u = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)e_1 + (2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)e_2 + (3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)e_3 .$$

Die Koordinaten bzgl. der Basis B haben dann also die Gestalt

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} [u]_{B'} .$$

Zusammen mit der letzten Teilaufgabe ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} [u]_{B''} = [u]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} [u]_{B'}$$

D.h. die gesuchte Matrix ist

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Inverse Matrix berechnet man mit Hilfe des Gaußalgorithmus.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Es ergibt sich also

$$A_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G3 (Koordinaten)
Wir betrachten den reellen Vektorraum $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ der Polymnomfunktionen vom Grad kleiner oder gleich drei. Man sieht leicht dass die Menge $B = (1, x, x^2, x^3)$ eine Basis von V bildet. Zusätzlich betrachten wir noch die Menge $B' = (1, x + 1, (x + 1)^2, (x + 1)^3)$.

(a) Zeigen Sie, dass B' eine Basis von $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Basisvektoren aus B' bezüglich der Basis B.

(c) Gegeben sei die Polynomfunktion $p(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. Was sind die Koordinaten von p bezüglich der Basis B und bezüglich der Basis B'?

(d) Was sind die Koordinaten der Basisvektoren aus B bezüglich der Basis B'?

Lösung:

(a) Da jede Basis von V die gleiche Anzahl von Elementen hat (in diesem Fall vier, da B vier Elemente hat) und jede linear unabhängige Teilmenge von V zu einer Basis ergänzt werden kann, reicht es zu zeigen, dass B' linear unabhängig ist.

Seien also $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2(x+1) + \lambda_3(x+1)^2 + \lambda_4(x+1)^3 = 0$. Dann folgt

$$0 = \lambda_1+\lambda_2(x+1)+\lambda_3(x^2+2x+1)+\lambda_4(x^3+3x^2+3x+1) = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+(\lambda_2+2\lambda_3+3\lambda_4)x+(\lambda_3+3\lambda_4)x^2+\lambda_4 x^3.$$

Da B eine Basis von V ist ergibt sich hieraus das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & + & 3\lambda_4 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & + & 3\lambda_4 & = & 0 \\ & & & & & & \lambda_4 & = & 0 \end{array}.$$

Daraus folgt nacheinander $\lambda_4 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$.
D.h. B' ist linear unabhängig.

w.z.b.w.

(b) Es ist

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\ x+1 & = & 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\ (x+1)^2 & = & 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\ (x+1)^3 & = & 1 \cdot 1 + 3 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 \,. \end{array}$$

D.h. es gilt

$$[1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [x+1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [(x+1)^2]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [(x+1)^3]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Offensichtlich ist

$$[p]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Koordinaten bezüglich B' setzt man an:

$$p(x) = x^3 + 3x^2 - 2 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2(x+1) + \lambda_3(x+1)^2 + \lambda_4(x+1)^3 \,.$$

Analog zur Rechnung im Aufgabenteil (a) ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & -2 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & + & 3\lambda_4 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & + & 3\lambda_4 & = & 3 \\ & & & & & & \lambda_4 & = & 1\,. \end{array}$$

Daraus ergibt sich nacheinander $\lambda_4 = 1, \lambda_3 = 0, \lambda_2 = -3$ und $\lambda_1 = -2 - 1 - 0 + 3 = 0$.
Wir erhalten also

$$[p]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Mit Hilfe einer Rechnung wie im Aufgabeteil (c) oder mit Hilfe von Matrizen oder durch direktes hinsehen erhält man

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 1 & = & 1\cdot 1 & + & 0\cdot(x+1) & + & 0\cdot(x+1)^2 & + & 0\cdot(x+1)^3 \\ x & = & -1\cdot 1 & + & 1\cdot(x+1) & + & 0\cdot(x+1)^2 & + & 0\cdot(x+1)^3 \\ x^2 & = & 1\cdot 1 & - & 2\cdot(x+1) & + & 1\cdot(x+1)^2 & + & 0\cdot(x+1)^3 \\ x^3 & = & -1\cdot 1 & + & 3\cdot(x+1) & - & 3\cdot(x+1)^2 & + & 1\cdot(x+1)^3\,. \end{array}$$

D.h. die gesuchten Koordinaten der Basisvektoren aus B sind

$$[1]_{B'} = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad [x]_{B'} = \begin{pmatrix} -1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad [x^2]_{B'} = \begin{pmatrix} 1\\-2\\1\\0 \end{pmatrix}, \quad [x^3]_{B'} = \begin{pmatrix} -1\\3\\-3\\1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G4 (Dimension*)

(*) Zeigen Sie, dass die folgenden Vektorräume unendlichdimensional sind.

(a) Der Vektorraum V der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (aufgefasst als Untervektorraum von $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$).

(b) Der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

Lösung:

(a) Die reellen Polynomfunktionen sind eine Teilmenge von V.

Aus der Vorlesung ist bereits bekannt, dass die Monome $1, x, x^2, \dots, x^n$ linear unabängig sind.

Da nach Definition eine Menge genau dann linear unabhängig ist, wenn jede endliche Teilmenge linear unabhängig ist, ist also auch die Menge

$$B = \{x^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

linear unabhängig in V.

Allgemein gilt: In einem n-dimensionalen Vektorraum ist jede Menge M mit mehr als n verschiedenen Elementen linear abhängig. Diese Aussage folgt aus Korollar 4.6.2 aus der Vorlesung.

D.h. da B eine linear unabhängige Teilmenge von V mit unendlich vielen Elementen ist, muss V unendlichdimensional sein.

w.z.b.w.

(b) Die Menge $B = \{\sqrt{p} \mid p \text{ ist Primzahl }\}$ hat bekanntlich unendlich viele Elemente.

Außerdem ist B im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ linear unabhängig, denn sei $\{\sqrt{p_1}, \dots \sqrt{p_n}\}$ eine endliche Teilmenge von B und $\lambda_1\sqrt{p_1} + \dots + \lambda_n\sqrt{p_n} = 0$ mit $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{Q}$. Dann folgt

$$\lambda_1 p_1 = -\lambda_2\sqrt{p_1 p_2} - \dots - \lambda_n\sqrt{p_1 p_n}\,.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist irrational, wenn nicht alle $\lambda_i, 2 \le i \le n$ Null sind, die linke Seite ist rational. D.h. es ist $\lambda_i = 0\,\forall\, 2 \le i \le n$. Daraus folgt auch $\lambda_1 = 0$.

D.h. $\{\sqrt{p_1}, \dots \sqrt{p_n}\}$ ist linear unabhängig und damit gilt dasselbe auch für B.

Wie in Aufgabe (a) schließt man daraus, dass $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum unendlichdimensional ist.

w.z.b.w.