Lineare Algebra I
9. Tutorium
Basis und Dimension

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
10. Dezember 2010

Aufgaben

Aufgabe G1 (Dimension)
Gibt es Untervektorräume U und V von $\mathbb{R}^6$ mit

$$\dim U = 5, \ \ \dim V = 4 \quad \text{und} \quad \dim(U \cap V) = 2\,?$$

Beweisen Sie ihre Antwort.

Aufgabe G2
Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $B = (e_1, e_2, e_3)$ und zwei weiteren Basen $B' = (b_1, b_2, b_3)$ und $B'' = (c_1, c_2, c_3)$, wobei

$$\begin{aligned}
e_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & e_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & e_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
b_1 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & b_2 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & b_3 &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
c_1 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, & c_2 &:= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, & c_3 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(a) Der Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ sei bezüglich der Basis B' gegeben durch $[w]_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten von w bezüglich der Basis B.

(b) Der Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ sei bezüglich der Standardbasis B gegeben durch $[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten von v bezüglich der Basis B'.

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten von b_1, b_2, b_3 bezüglich der Basis B'.

(d) Bestimme eine Matrix A_1 mit

$$[u]_B = A_1 [u]_{B'} \ \forall u \in \mathbb{R}^3\,.$$

(e) Bestimme eine Matrix A_2 mit

$$[u]_{B'} = A_2 [u]_{B''} \ \forall u \in \mathbb{R}^3\,.$$

Aufgabe G3 (Koordinaten)
Wir betrachten den reellen Vektorraum $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ der Polymnomfunktionen vom Grad kleiner oder gleich drei. Man sieht leicht dass die Menge $B = (1, x, x^2, x^3)$ eine Basis von V bildet. Zusätzlich betrachten wir noch die Menge $B' = (1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3)$.

(a) Zeigen Sie, dass B' eine Basis von $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Basisvektoren aus B' bezüglich der Basis B.

(c) Gegeben sei die Polynomfunktion $p(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. Was sind die Koordinaten von p bezüglich der Basis B und bezüglich der Basis B'?

(d) Was sind die Koordinaten der Basisvektoren aus B bezüglich der Basis B'?

Aufgabe G4 (Dimension*)
(*) Zeigen Sie, dass die folgenden Vektorräume unendlichdimensional sind.

(a) Der Vektorraum V der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (aufgefasst als Untervektorraum von $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

(b) Der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.