Lineare Algebra I
8. Tutorium
Vektorräume und Basis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
7. Dezember 2010

Aufgaben

Aufgabe G1 (Vektorräume)

(a) Ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum?

(b) Ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum?

(c) Ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Z}$-Vektorraum?

Dabei sollen die Addition und die skalare Multiplikation jeweils die bekannte Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$ sein.

Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung:

(a) $\mathbb{R}$ ist kein $\mathbb{C}$-Vektorraum, da die skalare Multiplikation eines Elements aus dem Grundkörper $\mathbb{C}$ mit einem Element aus $\mathbb{R}$ nicht in $\mathbb{R}$ liegen muss (z.B. ist $i \cdot 1 = i \notin \mathbb{R}$).

(b) $\mathbb{R}$ bildet mit der normalen reellen Addition und Multiplikation einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ bekanntermaßen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, ergeben sich alle nötigen Eigenschaften sofort.

(c) $\mathbb{R}$ ist kein $\mathbb{Z}$-Vektorraum, da $\mathbb{Z}$ kein Körper ist.

Aufgabe G2 (Vektoren in $\mathbb{R}^3$)

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig?

(b) Ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear unabhängig?

(c) Ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?

(d) Welche Teilmengen von $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

Begründen Sie jeweils ihre Aussagen.

Lösung:

(a) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. Dann ergibt sich folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

Aus dem letzten Gleichungssystem erhält man nacheinander $\lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$.

$\{v_1, v_2, v_3\}$ ist also linear unabhängig.

(b) Es gilt offensichtlich $v_1 + v_2 + v_3 - 2v_4 = 0$.
$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ist also nicht linear unabhängig.

(c) Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ beliebig. Durch den Ansatz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & x \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & \lambda_4 & = & z \end{array} \implies \begin{array}{ccccccccc} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & x \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & & & = & -y+z \end{array}$$

$$\implies \begin{array}{ccccccccc} & & & & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & x+y-z \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & & & = & -y+z \end{array}$$

Eine Lösung des letzten Gleichungssystems ist

$$\lambda_4 = 0,\ \lambda_3 = \frac{x+y-z}{2},\ \lambda_2 = -y+z+\frac{x+y-z}{2} = \frac{x-y+z}{2},\ \lambda_1 = y - \frac{x+y-z}{2} = \frac{-x+y+z}{2}\ .$$

D.h. jedes Element aus $\mathbb{R}^3$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 schreiben. Diese bilden also ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

(d) Je drei Vektoren aus $M := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Alle anderen Teilmengen sind keine Basis des $\mathbb{R}^3$.
Beweis:
Man sieht leicht, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ keine Linearkombination von v_1 und v_2 ist. Diese beiden Vektoren bilden also kein Erzeugendensystem und damit auch keine Basis des $\mathbb{R}^3$.
Analog ist der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ keine Linearkombination der Vektoren v_1 und v_4.Diese beiden Vektoren bilden also auch kein Erzeugendensystem und damit keine Basis des $\mathbb{R}^3$.
Durch vertauschen der Koordinaten erhält man, dass keine zweielemantrige Teilmenge von M ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist. Natürlich wird $\mathbb{R}^3$ dann auch nicht von Mengen mit weniger Elementen erzeugt. D.h. jede Teilmenge von M, die Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, muss mindestens drei Elemente haben. Da M selbst wegen Aufgabenteil (b) nicht linear unabhängig ist, muss eine solche Basis aus genau drei Elementen bestehen.
Ich zeige nun, dass die Mengen $M_1 := \{v_1, v_2, v_3\}$ und $M_2 := \{v_1, v_2, v_4\}$ Basen von $\mathbb{R}^3$ sind. Durch Vertauschen der Koordinaten ergibt sich dann, dass alle dreielementrige Teilmengen von M eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.
Wegen Aufgabenteil (a) ist M_1 linear unabhängig.
Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_4 = 0$. Dann ergibt sich folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \implies \begin{array}{ccccccc} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \implies \begin{array}{ccccccc} & & & & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}$$

Aus dem letzten Gleichungssystem erhält man nacheinander $\lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$.
M_2 ist also linear unabhängig.
Sei $x, y, z \in \mathbb{R}$ beliebig. Aus dem Gleichungssystem in Aufgabenteil (c) erhält man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \frac{-x+y+z}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x-y+z}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x+y-z}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-x+y+z}{2}\, v_1 + \frac{x-y+z}{2}\, v_2 + \frac{x+y-z}{2}\, v_3 \text{ und} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-x+z)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-y+z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (x+y-z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-x+z)\, v_1 + (-y+z)\, v_2 + (x+y-z)\, v_4\ .$$

D.h. sowohl M_1 als auch M_2 sind Erzeugendensysteme des $\mathbb{R}^3$.
Damit bilden beide Mengen eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

w.z.b.w.

Aufgabe G3 (Basis)
In $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die linearen Teilräume

$$U := \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) \middle| x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\} \quad \text{und} \quad V := \text{ spann } \left(\left(\begin{array}{r} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right) \right).$$

Bestimmen Sie je eine Basis von U, V, $U \cap V$ und $U + V$.

Lösung: Da die Vektoren

$$\left(\begin{array}{r} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right) \text{ und } \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right)$$

linear unabhängig sind (keiner ist ein Vielfaches des Anderen), bilden sie eine Basis von V.
Der Untervektorraum U von $\mathbb{R}^4$ besteht aus allen Vektoren der Form

$$\left(\begin{array}{c} x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) = x_2 \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) + x_3 \left(\begin{array}{r} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) + x_4 \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right)$$

mit $x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Man sieht leicht, dass die Vektoren

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{r} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \text{ und } \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right)$$

linear unabhängig sind. Diese bilden somit eine Basis von U.
Der Untervektorraum V besteht aus allen Vektoren der Form

$$\lambda \left(\begin{array}{r} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right) + \mu \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \lambda + 2\mu \\ -2\lambda \\ 3\lambda + 3\mu \\ \mu \end{array} \right)$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Setzen wir dies in die definierende Gleichung für U ein, so erhalten wir

$$0 = (\lambda + 2\mu) - (-2\lambda) + (3\lambda + 3\mu) - \mu = 6\lambda + 4\mu.$$

und somit $\mu = -\frac{3}{2}\lambda$. Damit besteht der Durchschnitt $U \cap V$ aus allen Vektoren der Form

$$\lambda \left(\begin{array}{r} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right) - \frac{3}{2}\lambda \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right) = \lambda \left(\begin{array}{c} -2 \\ -2 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right)$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Eine Basis von $U \cap V$ ist also der Vektor $\left(\begin{array}{c} -2 \\ -2 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right)$. Der Vektorraum $U + V$ wird von den Vektoren

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{r} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{r} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right) \text{ und } \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right)$$

erzeugt. Eine Basis bestimmt man wie in der Vorlesung gezeigt durch das Anwenden des Gaußalgorithmus.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden also eine Basis von $U + V$.

Aufgabe G4 (Lineare Abbildungen*)
(*) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimme ein Formel für $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ für beliebige Elemente $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösung: Für beliebige Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f\left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x \cdot f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + y \cdot f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x + y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$