Lineare Algebra I
8. Tutorium
Vektorräume und Basis

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
7. Dezember 2010

Aufgaben

Aufgabe G1 (Vektorräume)

(a) Ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum?

(b) Ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum?

(c) Ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Z}$-Vektorraum?

Dabei sollen die Addition und die skalare Multiplikation jeweils die bekannte Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$ sein.

Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe G2 (Vektoren in $\mathbb{R}^3$)
Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig?

(b) Ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear unabhängig?

(c) Ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?

(d) Welche Teilmengen von $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

Begründen Sie jeweils ihre Aussagen.

Aufgabe G3 (Basis)
In $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die linearen Teilräume

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\} \quad \text{und} \quad V := \text{ spann } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie je eine Basis von U, V, $U \cap V$ und $U + V$.

Aufgabe G4 (Lineare Abbildungen*)
(*) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimme ein Formel für $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ für beliebige Elemente $x, y \in \mathbb{R}$.