Lineare Algebra I
7. Tutorium
Vektorräume und lineare Abbildungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
1. Dezember 2010

Aufgaben

Aufgabe G1 (Lineare Abbildungen)
Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 3x+2y+z \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie durch konkretes Nachrechnen der definierenden Bedingung, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen sie eine Matrix A, so dass $f(v) = Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$ gilt. (Dabei bezeichnet Av wie gewöhnlich das Matrizenprodukt von A und v.)

(c) Bestimmen Sie den Kern von f. Dieser ist definiert durch

$$ker(f) = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(0) = \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(v) = 0\}.$$

Dabei bezeichnet 0 die Null in $\mathbb{R}^2$, also $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + 2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + 3(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \\ 3(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + 2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + 2\lambda_1 y_1 + 3\lambda_1 z_1 + \lambda_2 x_2 + 2\lambda_2 y_2 + 3\lambda_2 z_2 \\ 3\lambda_1 x_1 + 2\lambda_1 y_1 + \lambda_1 z_1 + 3\lambda_2 x_2 + 2\lambda_2 y_2 + \lambda_2 z_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1(x_1 + 2y_1 + 3z_1) + \lambda_2(x_2 + 2y_2 + 3z_2) \\ \lambda_1(3x_1 + 2y_1 + z_1) + \lambda_2(3x_2 + 2y_2 + z_2) \end{pmatrix} \\
&= \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 + 3z_1 \\ 3x_1 + 2y_1 + z_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 + 2y_2 + 3z_2 \\ 3x_2 + 2y_2 + z_2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2).
\end{aligned}$$

Dies ist gerade die definierende Gleichung der linearen Abbildungen.

(b) Für $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 3x+2y+z \end{pmatrix} = f(v).$$

Diese Matrix A ist also die gesuchte.

(c) Für $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt $f(v) = 0$ genau dann, wenn $\begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 3x+2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist. Dies ist ein lineares Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & -4y & - & 8z & = & 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} x & + & & - & z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind $ker(f) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe G2 (Untervektorräume)
Es sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum und $U \subset V$ eine Teilmenge von V.
Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen.

(i) U ist ein Untervektorraum von V.

(ii) Es sind die zwei Bedingungen

 (1) U ist nicht leer und

 (2) für je zwei Elemente $u_1, u_2 \in U$ und zwei Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ gilt

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U$$

erfüllt.

Lösung:

- Zunächst wird (i) $\Rightarrow$ (ii) gezeigt. Dazu sei U ein Untervektorraum von V. Wegen der Unterraumbedingung (U1) aus der Vorlesung gilt $0 \in U$ insbesondere ist U nicht leer und damit gilt (ii)(1).
  Für $u_1, u_2 \in U$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ gilt wegen (U3) $\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2 \in U$. Aus (U2) folgt dann $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U$, womit auch (ii)(2) und damit (ii) insgesamt gezeigt ist.
- Nun wird die umgekehrte Richtung gezeigt, d.h. man zeigt (ii) $\Rightarrow$ (i). Sei Also U eine Teilmenge von V, die (ii)(1) und (ii)(2) erfüllt.
  Wegen (ii)(1) existiert ein $u \in U$. Setzt man nun in (ii)(2) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ und $u_1 = u_2 = u$ so erhält man

$$0 = u - u = 1 \cdot u + (-1) \cdot u \in U \; .$$

  Damit ist (U1) erfüllt.
  Sind $u_1, u_2 \in U$, so kann man $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ setzen und erhält aus (ii)(2)

$$u_1 + u_2 \in U \; .$$

  Dies bedeutet, dass die Unterraumbedingung (U2) aus der Vorlesung erfüllt ist.
  Sind $\lambda \in \mathbb{K}, u \in U$ so folgt durch die Setzung $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 0, u_1 = u_2 = 0$ aus (ii)(2)

$$\lambda u = \lambda u + 0 \cdot u \in U \; .$$

  Damit gilt auch (U3).
  Insgesamt folgt aus den gezeigten Eigenschaften (U1), (U2) und (U3), dass U ein Untervektorraum von V ist.
  Es gilt also (i).

w.z.b.w.

Aufgabe G3 (Vektorräume)
Zeigen Sie, dass $V = \mathbb{R}$ mit den folgenden Operationen einen $\mathbb{R}-$ Vektorraum bildet.

$$\begin{aligned} +_V &: V \times V \to V, \qquad (x, y) \mapsto x + y - 1 \\ \cdot_V &: \mathbb{R} \times V \to V, \qquad (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x - \lambda + 1 = \lambda x - \lambda + 1 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen $+$ und $\cdot$ die gewöhnliche Addition bzw. Multiplikation der komplexen Zahlen.

Lösung:
Man muss die Bedingungen (V1)- (V8) aus der Vorlesung zeigen. Dabei ist zu beachten, dass das neutrale Element der Addition, welches normalerweise mit Null bezeichnet wird, hier das Element $e = 1 \in \mathbb{R}$ ist.
Für den Beweis seien im Folgenden $x, y, z, \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Die zu zeigenden Aussagen ergeben sich durch die folgenden einfachen Umformungen. (V1)

$$\begin{aligned} x +_V (y +_V z) &= x +_V (y + z - 1) = x + (y + z - 1) - 1 = (x + y - 1) + z - 1 = (x + y - 1) +_V z \\ &= (x +_V y) +_V z \end{aligned}$$

(V2)

$$x +_V e = x +_V 1 = x + 1 - 1 = x$$

(V3)

$$x +_V (-1) \cdot_V x = x +_V (-x + 1 + 1) = x + (-x) + 2 - 1 = 1 = e$$

(V4)

$$x +_V y = x + y - 1 = y + x - 1 = y +_V x$$

(V5)

$$\begin{aligned} \lambda \cdot_V (x +_V y) &= \lambda \cdot_V (x + y - 1) = \lambda(x + y - 1) - \lambda + 1 = \lambda x + \lambda y - \lambda - \lambda + 1 \\ &= \lambda x - \lambda + 1 + \lambda y - \lambda + 1 - 1 = (\lambda x - \lambda + 1) +_V (\lambda y - \lambda + 1) \\ &= \lambda \cdot_V x +_V \lambda \cdot_V y \end{aligned}$$

(V6)

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot_V x &= (\lambda_1 + \lambda_2)x - (\lambda_1 + \lambda_2) + 1 = \lambda_1 x - \lambda_1 + 1 + \lambda_2 x - \lambda_2 + 1 - 1 \\ &= (\lambda_1 x - \lambda_1 + 1) +_V (\lambda_2 x - \lambda_2 + 1) = \lambda_1 \cdot_V x +_V \lambda_2 \cdot_V x \end{aligned}$$

(V7)

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot_V (\lambda_2 \cdot_V x) &= \lambda_1 \cdot_V (\lambda_2 x - \lambda_2 + 1) = \lambda_1(\lambda_2 x - \lambda_2 + 1) - \lambda_1 + 1 = (\lambda_1 \lambda_2)x - (\lambda_1 \lambda_2) + 1 \\ &= (\lambda_1 \lambda_2) \cdot_V x \end{aligned}$$

(V8)

$$1 \cdot_V x = x - 1 + 1 = x$$

Insgeasmt folgt, dass $V = \mathbb{R}$ mit den angegebenen Operationen einen Vektorraum bildet.

w.z.b.w.