Lineare Algebra I
7. Tutorium
Vektorräume und lineare Abbildungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
1. Dezember 2010

Aufgaben

Aufgabe G1 (Lineare Abbildungen)
Betrachten Sie die Abbildung

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\quad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} x+2y+3z\\ 3x+2y+z\end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie durch konkretes Nachrechnen der definierenden Bedingung, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen sie eine Matrix A, so dass $f(v)=Av$ für alle $v\in\mathbb{R}^3$ gilt. (Dabei bezeichnet Av wie gewöhnlich das Matrizenprodukt von A und v.)

(c) Bestimmen Sie den Kern von f. Dieser ist definiert durch

$$ker(f)=f^{-1}(\{0\})=f^{-1}(0)=\{v\in\mathbb{R}^3\,|\,f(v)=0\}\,.$$

Dabei bezeichnet 0 die Null in $\mathbb{R}^2$, also $0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Aufgabe G2 (Untervektorräume)
Es sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum und $U\subset V$ eine Teilmenge von V.
Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen.

(i) U ist ein Untervektorraum von V.

(ii) Es sind die zwei Bedingungen
  (1) U ist nicht leer und
  (2) für je zwei Elemente $u_1,u_2\in U$ und zwei Koeffizienten $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K}$ gilt

$$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2\in U$$

erfüllt.

Aufgabe G3 (Vektorräume)
Zeigen Sie, dass $V=\mathbb{R}$ mit den folgenden Operationen einen $\mathbb{R}-$ Vektorraum bildet.

$$\begin{aligned} +_V &: V\times V\to V, && (x,y)\mapsto x+y-1\\ \cdot_V &: \mathbb{R}\times V\to V, && (\lambda,x)\mapsto\lambda\cdot x-\lambda+1=\lambda x-\lambda+1\end{aligned}$$

Dabei bezeichnen $+$ und $\cdot$ die gewöhnliche Addition bzw. Multiplikation der komplexen Zahlen.