Lineare Algebra I
6. Tutorium
Die komplexen Zahlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
1. Dezember 2010

Aufgaben

Aufgabe G1 (komplexe Zahlen als Elemente des $\mathbb{R}^2$)
Die komplexen Zahlen sind die Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ zusammen mit einer Addition und einer Multiplikation, die wie folgt definiert sind.

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad \big((x,y),(x',y')\big) \mapsto (x+x', y+y')$$
$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad \big((x,y),(x',y')\big) \mapsto (xx'-yy', xy'+x'y)$$

Man schreibt außerdem

$$i := (0,1)\,.$$

Die Reellen Zahlen werden durch die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, a \mapsto (a,0)$ in die komplexen Zahlen eingebettet.

(a) Zeigen Sie, dass diese Abbildung ϕ mit der Addition und Multiplikation verträglich und injektiv ist.

Das bedeutet man kann eine reelle Zahl x als Element $(x,0) \in \mathbb{C}$ auffassen und hat so $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

(b) Zeigen Sie: Für jedes Element $(x,y) \in \mathbb{C}$ gibt es eindeutig bestimmte reelle Zahlen a und b mit $(x,y) = a + ib$.

Dies liefert eine neue Schreibweise der komplexen Zahlen in der Form $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

(c) Wie sehen die Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen in dieser Schreibweise aus?

Die letzte Schreibweise wird meist als Standardschreibweise verwendet. In ihr werden auch die meisten Rechnungen mit komplexen Zahlen durchgeführt. Durch die erste Schreibweise als Elemente im $\mathbb{R}^2$ hat man eine Darstellung der komplexen Zahlen als Punkte in der Ebene, die für geometrische Interpretationen nützlich ist.

(d) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Schreibweise $a + ib$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ dar.

$$(-2+i)(1+i), \qquad (5+i)(3-2i) \qquad \text{und} \qquad i^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

(e) Wie viele komplexe Zahlen erfüllen die Gleichung $x^2 + 4 = 0$? Geben Sie diese komplexen Zahlen an.

Die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, a + ib \mapsto a - ib$ heißt Konjugation. Man schreibt auch

$$\overline{a+ib} := a - ib\,.$$

Der Betrag einer kompexen Zahl $z = a + ib$ ist definiert durch $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$. Dies ist immer eine nichtnegative reelle Zahl.

(f) Es seien $z_1 = 3 + 4i$ und $z_2 = -2 + i$. Berechnen Sie die komplexen Zahlen

$$\overline{z_1},\ z_1 + \overline{z_2},\ z_1 \cdot z_2,\ z_1 \cdot \overline{z_2},\ \overline{z_1} \cdot z_2,\ z_1 \cdot \overline{z_1} \quad \text{und} \quad |z_1|\,.$$

(g) Zeigen Sie, dass die Konjugation mit der Addition und der Multiplikation komplexer Zahlen verträglich ist. D.h. Sie müssen zeigen, dass

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \text{ und } \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

für alle komplexen Zahlen z_1 und z_2 gilt.

(h) Wenn Sie die komplexen Zahlen wie am Anfang als Elemente der $x-y-$Ebene auffassen, wie kann man sich dann die Konjugation geometrisch vorstellen?

(i) Zeigen Sie: Für alle kompexen Zahlen z gilt
$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}\,.$$

(j) Zeigen Sie, dass die komplexen Zahlen mit den beschriebenen Operationen einen Körper bilden.

(k) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Schreibweise $a+ib$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ dar.
$$\frac{i+1}{i-1} \text{ und } \frac{10(3+2i)}{-1+i} - \frac{50+10i}{3+i}$$
Dabei bezeichnet die Schreibweise $\frac{z_1}{z_2}$ wie üblich die Multiplikation von z_1 mit dem multiplikativen Inversen von z_2.

Lösung:

(a) Für $x, x' \in \mathbb{R}$ gilt
$$\begin{aligned} \phi(x)+\phi(x') &= (x,0)+(x',0) = (x+x', 0+0) = \phi(x+x'), \\ \phi(x)\cdot\phi(x') &= (x,0)\cdot(x',0) = (xx'-0\cdot 0, x\cdot 0 + x'\cdot 0) = (xx',0) = \phi(xx') \text{ und} \\ \text{Aus } \phi(x)=\phi(x') \quad &\text{folgt} \quad (x,0)=(x',0) \Rightarrow x = x'\,. \end{aligned}$$

(b) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt
$$a+ib = (a,0)+(0,1)\cdot(b,0) = (a,0)+(0\cdot b - 1\cdot 0, 0\cdot 0 + b\cdot 1) = (a+0, 0+b) = (a,b)\,.$$
Die Aussage ergibt sich hieraus sofort.

(c) Seien $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$ komplexe Zahlen (mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$) dann gilt
$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1+ib_1)+(a_2+ib_2) = (a_1,b_1)+(a_2,b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2) = (a_1+a_2)+i(b_1+b_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2) = (a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2) = (a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+a_2b_1) = (a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1) \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} (-2+i)(1+i) &= (-2\cdot 1 - 1\cdot 1) + i(-2\cdot 1 + 1\cdot 1) = -3-i \\ (5+i)(3-2i) &= (5\cdot 3 - 1\cdot(-2)) + i(5\cdot(-2)+1\cdot 3) = 17-7i \end{aligned}$$

Man erhält analog $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. Daraus ergibt sich für alle $k, l \in \mathbb{N}$, dass $i^{4k+l} = 1^k \cdot i^l = i^l$ gilt. Es folgt
$$i^n = \begin{cases} i & \text{für} \quad n \equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & \text{für} \quad n \equiv 2 \bmod 4 \\ -i & \text{für} \quad n \equiv 3 \bmod 4 \\ 1 & \text{für} \quad n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases}$$

Bemerkung: Bereits in der Schreibweise i^n wird die Assoziativität der Multiplikation vorrausgesetzt. In Aufgabenteil (k) wird diese dann auch gezeigt.

(e) Für $z = a+ib$ gilt $z^2 = (a^2-b^2)+i(2ab)$ Dies ist genau dann gleich -4, wenn $a=0$ und $b=\pm 2$ ist. D.h. die gegebene Gleichung hat in den komplexen Zahlen genau zwei Lösungen und zwar $2i$ und $-2i$.

(f)
$$\begin{aligned} \overline{z_1} &= 3-4i \\ z_1 + \overline{z_2} &= 1+3i \\ z_1 \cdot z_2 &= -10-5i \\ z_1 \cdot \overline{z_2} &= (3+4i)\cdot(-2-i) = -2-11i \\ \overline{z_1} \cdot z_2 &= (3-4i)\cdot(-2+i) = -2+11i \\ z_1 \cdot \overline{z_1} &= (3+4i)\cdot(3-4i) = 25+0\cdot i = 25 \\ |z_1| &= \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

(g) Es seien $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$ mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a_1+a_2) + i(b_1+b_2)} = (a_1+a_2) - i(b_1+b_2) = (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2} \text{ und} \\
\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)} = (a_1a_2 - b_1b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1) \\
&= (a_1a_2 - (-b_1)(-b_2)) + i(a_1(-b_2) + a_2(-b_1)) = (a_1 - ib_1)\cdot(a_2 - ib_2) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\ .
\end{aligned}$$

(h) Die Konjugation bildet im $\mathbb{R}^2$ einen Punkt (x, y) auf den Punkt $(x, -y)$ ab. Geometrisch entspricht dies der Spiegelung an der $x-$Achse.

(i) Für jede komplexe Zahl $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$z \cdot \overline{z} = (a+ib)\cdot(a-ib) = (a^2 - (-b^2)) + i(a(-b) + ab) = a^2 + b^2 = |z|^2\ .$$

(j) Man muss folgende sechs Eigenschaften zeigen.

(1) $(\mathbb{C}, +, 0 + i\cdot 0)$ ist eine abelsche Gruppe.
(2) Die Multiplikation in $\mathbb{C}$ ist kommutativ.
(3) Die Multiplikation in $\mathbb{C}$ ist assoziativ.
(4) Es gilt die Distributivität, d.h. $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.
(5) $1 = 1 + i \cdot 0$ ist das neutrale Element in $\mathbb{C}$ bzgl. der Multiplikation.
(6) Jede komplexe Zahl ungleich $0 = 0 + i \cdot 0$ besitzt ein multilikatives Inverse.

Beweis: Für den gesamten Beweis seien $z = a + ib, z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$ und $z_3 = a_3 + ib_3$ komplexe Zahlen mit $a, a_1, a_2, a_3, b, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

(1) Da die Addition in $\mathbb{C}$ Komponentenweise definiert ist, folgen alle Eigenschaften einer abelschen Gruppe aus den entsprechenden Eigenschaften der Addition in den reellen Zahlen.

(2) Es gilt

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) = (a_2a_1 - b_2b_1) + i(a_2b_1 + a_1b_2) = z_2 \cdot z_1\ .$$

(3) Es gilt

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= z_1 \cdot (a_2a_3 - b_2b_3 + i(a_2b_3 + a_3b_2)) \\
&= a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(a_2b_3 + a_3b_2) + i(a_1(a_2b_3 + a_3b_2) + (a_2a_3 - b_2b_3)b_1) \\
&= a_1a_2a_3 - a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3 - a_3b_1b_2 + i(a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - b_1b_2b_3) \\
&= (a_1a_2 - b_1b_2)a_3 - (a_1b_2 + a_2b_1)b_3 + i((a_1a_2 - b_1b_2)b_3 + a_3(a_1b_2 + a_2b_1)) \\
&= (a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)) \cdot z_3 = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3\ .
\end{aligned}$$

(4) Es gilt

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + a_3 + i(b_2 + b_3)) \\
&= a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3)) + i(a_1(b_2 + b_3) + (a_2 + a_3)b_1) \\
&= a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 + i(a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_1) \\
&= (a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)) + (a_1a_3 - b_1b_3 + i(a_1b_3 + a_3b_1)) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3\ .
\end{aligned}$$

(5) Es gilt

$$1 \cdot z = (1 + i \cdot 0) \cdot (a + ib) = (1 \cdot a - 0 \cdot b) + i(1 \cdot b + a \cdot 0) = a + ib = z\ .$$

Mit Hilfe der Kommutativität folgt auch $z \cdot 1 = z$.

(6) Mit Hilfe des letzten Aufgabenteils und der Kommutativität der Multiplikation folgt für alle $z \neq 0$

$$z \cdot \left(\frac{1}{|z|^2} \cdot \overline{z}\right) = \frac{1}{|z|^2} \cdot (z \cdot \overline{z}) = \frac{1}{|z|^2} \cdot |z|^2 = 1\ .$$

Zusammen mit der Kommutativatät der Multiplikation ergibt sich also, dass $\frac{1}{|z|^2} \cdot \overline{z}$ immer das multiplikative Inverse zu z ist.

w.z.b.w.

(k)

$$\begin{aligned}
\frac{i+1}{i-1} &= \frac{(1+i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-1-(-1)+i(-1-1)}{2} = -i = 0 + i\cdot(-1) \\
\frac{10(3+2i)}{-1+i} - \frac{50+10i}{3+i} &= \frac{10(3+2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} - \frac{(50+10i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} \\
&= \frac{10(-3-(-2)+i(-2-3))}{2} - \frac{150-(-10)+i(-50+30)}{10} \\
&= -5-25i-16+2i = -21 + i\cdot(-23)
\end{aligned}$$

Aufgabe G2 (Polardarstellung*)

(a) (*) Zeigen Sie, dass es für jede komlexe Zahl $z \neq 0$ eindeutig bestimmte Zahlen $r \in \mathbb{R}^{>0}$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ gibt mit

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)\,.$$

Betrachten Sie hierzu am besten die Geometrische Bedeutung der komplexen Zahlen und des Sinus/Cosinus. Wie bestimmt man r aus z?

Die daraus resultierende Darstellung der komplexen Zahlen ungleich Null als Tupel $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^{>0} \times [0, 2\pi)$ bzw. in der Form $r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ heißt Polardarstellung.

(b) (*) Geben sie folgende kompexe Zahlen in Polardarstellung an.

$$1+i,\ \sqrt{3}-i \text{ und } \frac{1+i}{1-i}$$

(c) (*) Berechnen Sie die Polardarstellung des Produkts $(r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)) \cdot (r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2))$. Dabei seien $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^{>0}$ und $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$.

(d) (*) Wie kann man die Multiplikation mit einer komplexer Zahl $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ($\varphi \in [0, 2\pi]$) geometrisch interpretieren?

Lösung:

(a) Betrachtet man $z = (x, y)$ als Vektor in $\mathbb{R}^2$, so hat dieser die Länge $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Sei $\varphi \in [0, 2\pi)$ der Winkel zwischen der x−Achse und dem Vektor z.
Die geometrische Interpretation von Sinus und Cosinus ist, dass in einem rechtwinkligen Dreieck mit Winkel φ in einer Ecke gilt: $\cos\varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ und $\sin\varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$.
In dem speziellen Fall der komplexen Zahl z gilt also $\cos\varphi = \frac{x}{|z|}$ und $\sin\varphi = \frac{y}{|z|}$.
Insgesamt ergibt sich die Darstellung

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$

Eine solche Darstellung existiert also immer. Man muss noch die Eindeutigkeit zeigen. Dazu sei
$z = (x, y) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ mit $r \in \mathbb{R}^{>0}, \varphi \in [0, 2\pi), x, y \in \mathbb{R}$.
Daraus folgt immer

$$|z| = \sqrt{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \sqrt{r^2} = r\,.$$

D.h. r ist in $\mathbb{R}^{>0}$ durch z eindeutig bestimmt und wegen $\cos\varphi = \frac{x}{r}$ und $\sin\varphi = \frac{y}{r}$ ist auch $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig bestimmt.

(b)

$$\begin{aligned}
1+i &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
\sqrt{3}-i &= 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) \\
\frac{1+i}{1-i} &= -i = 1\cdot(\cos\pi + i\sin\pi)
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
(r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1))\cdot(r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)) &= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)) \\
&= r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))\,.
\end{aligned}$$

Dabei wurden die Additionstheoreme verwendet.

(d) Durch die vorherigen Aufgaben erkennt man, dass die Multiplikation mit einer solchen Zahl z einer Drehung in $\mathbb{R}^2$ um den Ursprung $(0, 0)$ um den Winkel φ entspricht.