

Lineare Algebra I

6. Tutorium

Die komplexen Zahlen



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
1. Dezember 2010

Aufgaben

Aufgabe G1 (komplexe Zahlen als Elemente des \mathbb{R}^2)

Die komplexen Zahlen sind die Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ zusammen mit einer Addition und einer Multiplikation, die wie folgt definiert sind.

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} & ((x, y), (x', y')) &\mapsto (x + x', y + y') \\ \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} & ((x, y), (x', y')) &\mapsto (xx' - yy', xy' + x'y) \end{aligned}$$

Man schreibt außerdem

$$i := (0, 1).$$

Die Reellen Zahlen werden durch die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, a \mapsto (a, 0)$ in die komplexen Zahlen eingebettet.

(a) Zeigen Sie, dass diese Abbildung ϕ mit der Addition und Multiplikation verträglich und injektiv ist.

Das bedeutet man kann eine reelle Zahl x als Element $(x, 0) \in \mathbb{C}$ auffassen und hat so $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

(b) Zeigen Sie: Für jedes Element $(x, y) \in \mathbb{C}$ gibt es eindeutig bestimmte reelle Zahlen a und b mit $(x, y) = a + ib$.

Dies liefert eine neue Schreibweise der komplexen Zahlen in der Form $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

(c) Wie sehen die Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen in dieser Schreibweise aus?

Die letzte Schreibweise wird meist als Standardschreibweise verwendet. In ihr werden auch die meisten Rechnungen mit komplexen Zahlen durchgeführt. Durch die erste Schreibweise als Elemente im \mathbb{R}^2 hat man eine Darstellung der komplexen Zahlen als Punkte in der Ebene, die für geometrische Interpretationen nützlich ist.

(d) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Schreibweise $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

$$(-2 + i)(1 + i), \quad (5 + i)(3 - 2i) \quad \text{und} \quad i^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(e) Wie viele komplexe Zahlen erfüllen die Gleichung $x^2 + 4 = 0$? Geben Sie diese komplexen Zahlen an.

Die Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, a + ib \mapsto a - ib$ heißt Konjugation. Man schreibt auch

$$\overline{a + ib} := a - ib.$$

Der Betrag einer komplexen Zahl $z = a + ib$ ist definiert durch $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$. Dies ist immer eine nichtnegative reelle Zahl.

(f) Es seien $z_1 = 3 + 4i$ und $z_2 = -2 + i$. Berechnen Sie die komplexen Zahlen

$$\overline{z_1}, \quad z_1 + \overline{z_2}, \quad z_1 \cdot z_2, \quad z_1 \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{z_1} \cdot z_2, \quad z_1 \cdot \overline{z_1} \quad \text{und} \quad |z_1|.$$

(g) Zeigen Sie, dass die Konjugation mit der Addition und der Multiplikation komplexer Zahlen verträglich ist. D.h. Sie müssen zeigen, dass

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{und} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

für alle komplexen Zahlen z_1 und z_2 gilt.

(h) Wenn Sie die komplexen Zahlen wie am Anfang als Elemente der $x - y$ -Ebene auffassen, wie kann man sich dann die Konjugation geometrisch vorstellen?

(i) Zeigen Sie: Für alle komplexen Zahlen z gilt

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}.$$

(j) Zeigen Sie, dass die komplexen Zahlen mit den beschriebenen Operationen einen Körper bilden.

(k) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Schreibweise $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

$$\frac{i+1}{i-1} \quad \text{und} \quad \frac{10(3+2i)}{-1+i} - \frac{50+10i}{3+i}$$

Dabei bezeichnet die Schreibweise $\frac{z_1}{z_2}$ wie üblich die Multiplikation von z_1 mit dem multiplikativen Inversen von z_2 .

Aufgabe G2 (Polardarstellung*)

(a) (*) Zeigen Sie, dass es für jede komplexe Zahl $z \neq 0$ eindeutig bestimmte Zahlen $r \in \mathbb{R}^{>0}$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ gibt mit

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Betrachten Sie hierzu am besten die Geometrische Bedeutung der komplexen Zahlen und des Sinus/Cosinus. Wie bestimmt man r aus z ?

Die daraus resultierende Darstellung der komplexen Zahlen ungleich Null als Tupel $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^{>0} \times [0, 2\pi)$ bzw. in der Form $r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ heißt Polardarstellung.

(b) (*) Geben sie folgende komplexe Zahlen in Polardarstellung an.

$$1 + i, \sqrt{3} - i \quad \text{und} \quad \frac{1+i}{1-i}$$

(c) (*) Berechnen Sie die Polardarstellung des Produkts $(r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)) \cdot (r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2))$. Dabei seien $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^{>0}$ und $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$.

(d) (*) Wie kann man die Multiplikation mit einer komplexer Zahl $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ($\varphi \in [0, 2\pi]$) geometrisch interpretieren?