Lineare Algebra I
3. Tutorium
Inverse Matrizen und Gruppen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
11. November 2010

Aufgaben

Aufgabe G1 (Die zweite Variante des Gauß-Algorithmus)
In dieser Aufgabe wird eine zweite Variante des Gauß-Algorithmus erklärt und angewendet. Das Ziel ist dabei die Bestimmung des Inversen einer quadratischen Matrix. Hierzu seien $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine gegebene Matrix und $x, y \in \mathbb{R}^n$ beliebige Vektoren.
Der Ausgangspunkt ist folgende Aussage, die aus der Vorlesung bekannt ist:
$B \in M_n(\mathbb{R})$ ist genau dann die Inverse Matrix zu A, wenn $Ax = y \Leftrightarrow x = By$ gilt.
Das Verfahren besteht nun daraus, dass man die Matrix $\begin{pmatrix} A & E_n \end{pmatrix}$ nur durch die drei folgenden Operationen in die Gestalt $\begin{pmatrix} E_n & B \end{pmatrix}$ bringt (sofern das möglich ist).

(1) Addition eines Skalaren Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

(2) Vertauschen von zwei Zeilen.

(3) Multiplikation einer Gleichung mit einem Skalaren $\lambda \neq 0$.

Dies sind gerade die Umformungen, welche die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems erhalten. Daraus ergibt sich, dass $Ax = E_n y \Leftrightarrow E_n x = By$ gilt. Wegen der obigen Aussage ist also B die inverse Matrix zu A.
Eine mögliche Vorgehensweise für diese Umformung ist folgende:
Zunächst verwendet man den aus der Vorlesung bekannten Gauß-Algorithmus um A in Stufenform zu bringen. Danach addiert man Vielfache der letzten Zeile zu den Ersten Zeilen, so dass in der letzten Spalte Nullen entstehen. Dann tut man dasselbe mit der vorletzten Zeile usw. bis links eine Diagonalmatrix steht. Danach muss man nur noch die Zeilen mit den entsprechenden Skalaren multiplizieren, um links E_n stehen zu haben.
Ein einfaches Beispiel: Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ verläuft der Algorithmus wie folgt.
Der Ausgangspunkt ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Addition des (-2)-fachen der ersten Zeile zur Zweiten ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun addiert man die zweite Zeile zur Ersten und erhält

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Multiplizieren der letzten Zeile mit -1 erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich als inverse Matrix $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Überprüfen Sie, dass in diesem Beispiel tatsächlich $A^{-1} = B$ gilt

(b) Wieso scheitert dieser Algorithmus, wenn A nicht invertierbar ist?

Sind folgende Matrizen invertierbar? Wenn ja, so berechnen Sie die inverse Matrix mit Hilfe des oben beschriebenen Gauß-Algorithmus.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Wenn A nicht invertierbar ist, sind in der Stufenform der Matrix bereits einige Zeilen Null. In diesem Fall kann man durch obigen Algorithmus die Matrix nicht in die gewünschte Gestalt bringen. In allen anderen Fällen erhällt man durch den beschriebenen Algorithmus tatsächlich die Inverse Matrix.

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Es gilt also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & \frac{6}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist also nicht invertierbar.

(e)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & \frac{5}{2} & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 & \frac{7}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Es gilt also

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G2 (Inverse und Transponierte einer Matrix)
Es sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix mit der inversen Matrix A^{-1}.
Zeigen Sie, dass dann auch die Matrix A^T invertierbar ist und geben Sie die zugehörige inverse Matrix an.

Lösung: Es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Dies folgt direkt aus der Definition des Inversen und den bekannten Eigenschaften der Transponierten einer Matrix durch folgende Gleichungsketten.

$$A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = E_n^T = E_n \qquad (A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = E_n^T = E_n$$

Aufgabe G3 (Gruppen)
Wir betrachten die Teilmenge $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \exists B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ mit } A \cdot B = B \cdot A = E_n\}$ der invertierbaren $n \times n$ - Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot, E_n)$ ein Gruppe ist (dabei bezeichntet $\cdot$ die bekannte Matrixmultiplikation). Machen Sie sich dazu als Erstes klar, welche **vier** Aussagen nötig sind um dies zu zeigen.

(b) Ist die Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$ abelsch? Beweisen Sie ihre Antwort für den Spezialfall $n = 3$.

Lösung:

(a) Man muss zeigen:

(1) Die Multiplikation ist eine Abbildung $\cdot : GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$. Das heißt es ist zu zeigen, dass $A \cdot B \in GL_n(\mathbb{R})\ \forall A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ gilt.

(2) Die Assoziativität: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C\ \ \forall A, B, C \in GL_n(\mathbb{R})$.

(3) Die Eigenschaft des neutralen Elements: $A \cdot E_n = A = E_n \cdot A\ \ \forall A \in GL_n(\mathbb{R})$.

(4) Die Existenz von inversen Elementen: Für alle $A \in GL_n(\mathbb{R})$ existiert ein Element $B \in GL_n(\mathbb{R})$ mit $A \cdot B = B \cdot A = E_n$.

Bekannt ist bereits, dass $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}\ \forall A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ gilt. Damit ist $A \cdot B$ invertierbar, also ein Element von $GL_n(\mathbb{R})$. Dies zeigt Aussage (1). Die Eigenschaften (2) und (3) sind bekannte Rechenregeln der Matrixmultiplikation. Die Aussage (4) ist gerade die definierende Eigenschaft von $GL_n(\mathbb{R})$.

w.z.b.w.

(b) Die Gruppe ist nicht abelsch. Im Spezialfall $n = 3$ muss man ein Gegenbeispiel für die Kommutativität angeben. Eine Möglichkeit wäre:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sind A und B Elemente von $GL_3(\mathbb{R})$. Außerdem ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt also $A \cdot B \neq B \cdot A$ und die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ.

w.z.b.w.

Aufgabe G4 (Symmetrische Gruppen)
Wir betrachten in dieser Aufgabe die im Tutorium 2 eingeführte Menge S_n aller n-stelligen Permutationen.
$\circ : S_n \times S_n \to S_n$ bezeichnet die bereits eingeführte Verkettung von Permutationen.

(a) Zeigen Sie, dass $\circ$ auf S_n assoziativ ist. Tipp: Betrachten Sie die Permutationen in dieser Teilaufgabe am besten als Abbildungen von $\{1, \ldots, n\}$ in sich.

(b) Berechnen Sie alle möglichen Verkettungen von Elementen in S_3. Stellen Sie diese in einer Verknüpfungstabelle dar.

(c) Zeigen Sie, dass S_3 mit der Verkettung $\circ$ eine Gruppe bildet. Was ist das neutrale Element?

(d) (*) Welche Elemente von S_3 haben eine gerade Anzahl von Fehlständen (Definition siehe Tutorium 2)?

(e) (*) Eine Untergruppe einer gegebenen Gruppe G ist eine Teilmenge von G, die mit der Operation und dem neutralen Element von G selbst wieder eine Gruppe bildet.
Ist die Teilmenge der Permutationen mit gerader Anzahl von Fehlständen in S_3 eine Untergruppe?

(f) (*) Geben Sie alle Untergruppen von S_3 an.

(g) (*) Zeigen Sie, dass S_n für alle natürlichen Zahlen n eine Gruppe ist.

Lösung:

(a) Seien $\sigma, \tau, \rho : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ Permutationen aus S_n und $x \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig. Dann gilt

$$(\sigma \circ (\tau \circ \rho))(x) = \sigma((\tau \circ \rho)(x)) = \sigma(\tau(\rho(x))) = (\sigma \circ \tau)(\rho(x)) = ((\sigma \circ \tau) \circ \rho)(x)\,,$$

woraus die Assoziativität $\sigma \circ (\tau \circ \rho) = (\sigma \circ \tau) \circ \rho$ folgt.
Bemerkung: Auf diese Weise kann man auch allgemein die Assoziativität von Abbildungen zeigen.

(b) S_3 hat folgende Elemente:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1),\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12),\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13),$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23),\ \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123),\ \text{ und } \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132)$$

Daraus ergibt sich die Verknüpfungstabelle:

$\circ$	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
σ_2	σ_2	σ_1	σ_6	σ_5	σ_4	σ_3
σ_3	σ_3	σ_5	σ_1	σ_6	σ_2	σ_4
σ_4	σ_4	σ_6	σ_5	σ_1	σ_3	σ_2
σ_5	σ_5	σ_3	σ_4	σ_2	σ_6	σ_1
σ_6	σ_6	σ_4	σ_2	σ_3	σ_1	σ_5

(c) Die Verkettung ist bekanntermaßen abgeschlossen in S_n (das sieht man insbesondere an der Verknüpfungstabelle in Aufgabenteil (b)). Die Assoziativität wurde in (a) gezeigt. Die restlichen Eigenschaften kann man auch an der Verknüpfungstabelle ablesen.
Das neutrale Element ist σ_1 und die inversen Elemente sind

$$\sigma_1^{-1} = \sigma_1,\ \sigma_2^{-1} = \sigma_2,\ \sigma_3^{-1} = \sigma_3,\ \sigma_4^{-1} = \sigma_4,\ \sigma_5^{-1} = \sigma_6,\ \sigma_6^{-1} = \sigma_5\,.$$

w.z.b.w.

(d) σ_1, σ_5 und σ_6 haben eine gerade Anzahl von Fehlständen.

(e) Ja, die Menge $\{\sigma_1, \sigma_5, \sigma_6\}$ bildet eine Untergruppe von S_3. Man kann alle Eigenschaften wieder leicht an der Verknüpfungstabelle unter (b) ablesen.

(f) Die Untergruppen kann man auch an der Verknüpfungstabelle ablesen. Es sind

$$\{\sigma_1\},\ \{\sigma_1, \sigma_2\},\ \{\sigma_1, \sigma_3\},\ \{\sigma_1, \sigma_4\},\ \{\sigma_1, \sigma_5, \sigma_6\} \text{ und } \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}\,.$$

(g) Dass die Verkettung von Permutationen wieder eine Permutation ist, folgt direkt aus der Aussage, dass die Verkettung zweier bijektiver Abbildungen wieder bijektiv ist (siehe Aufgabe G2 (a) im Tutorium 2) und der Betrachtung von Permutationen als bijektive Abbildungen.

Die Assoziativität wurde bereits in Aufgabenteil (a) gezeigt.

Das neutrale Element ist immer (1), denn es gilt $(1) \circ \tau = \tau = \tau \circ (1)$ für alle $\tau \in S_n$.

Ein beliebiges Element $\tau \in S_n$ ist eine bijektive Abbildung von $\{1, \ldots, n\}$ in sich. Deswegen existiert eine Umkehrabbildung ρ von τ, die wieder bijektiv ist. ρ ist also auch ein Element von S_n. Außerdem gilt wegen der Definition der Umkehrabbildung $\rho \circ \tau = \tau \circ \rho = (1)$. D.h. ρ ist das Inverse Element von τ.

Insbesondere besitzt jedes Element in S_n ein Inverses.

w.z.b.w.