

# Lineare Algebra I

## 3. Tutorium

### Inverse Matrizen und Gruppen



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik  
Prof. Dr. Kollross  
Dr. Le Roux  
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011  
11. November 2010

#### Aufgaben

##### Aufgabe G1 (Die zweite Variante des Gauß-Algorithmus)

In dieser Aufgabe wird eine zweite Variante des Gauß-Algorithmus erklärt und angewendet. Das Ziel ist dabei die Bestimmung des Inversen einer quadratischen Matrix. Hierzu seien  $A \in M_n(\mathbb{R})$  eine gegebene Matrix und  $x, y \in \mathbb{R}^n$  beliebige Vektoren.

Der Ausgangspunkt ist folgende Aussage, die aus der Vorlesung bekannt ist:

$B \in M_n(\mathbb{R})$  ist genau dann die Inverse Matrix zu  $A$ , wenn  $Ax = y \Leftrightarrow x = By$  gilt.

Das Verfahren besteht nun daraus, dass man die Matrix  $\begin{pmatrix} A & E_n \end{pmatrix}$  nur durch die drei folgenden Operationen in die Gestalt  $\begin{pmatrix} E_n & B \end{pmatrix}$  bringt (sofern das möglich ist).

- (1) Addition eines Skalaren Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.
- (2) Vertauschen von zwei Zeilen.
- (3) Multiplikation einer Gleichung mit einem Skalaren  $\lambda \neq 0$ .

Dies sind gerade die Umformungen, welche die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems erhalten. Daraus ergibt sich, dass  $Ax = E_n y \Leftrightarrow E_n x = B y$  gilt. Wegen der obigen Aussage ist also  $B$  die inverse Matrix zu  $A$ .

Eine mögliche Vorgehensweise für diese Umformung ist folgende:

Zunächst verwendet man den aus der Vorlesung bekannten Gauß-Algorithmus um  $A$  in Stufenform zu bringen. Danach addiert man Vielfache der letzten Zeile zu den Ersten Zeilen, so dass in der letzten Spalte Nullen entstehen. Dann tut man dasselbe mit der vorletzten Zeile usw. bis links eine Diagonalmatrix steht. Danach muss man nur noch die Zeilen mit den entsprechenden Skalaren multiplizieren, um links  $E_n$  stehen zu haben.

Ein einfaches Beispiel: Für die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  verläuft der Algorithmus wie folgt.

Der Ausgangspunkt ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Addition des  $(-2)$ -fachen der ersten Zeile zur Zweiten ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun addiert man die zweite Zeile zur Ersten und erhält

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Multiplizieren der letzten Zeile mit  $-1$  erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich als inverse Matrix  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

- (a) Überprüfen Sie, dass in diesem Beispiel tatsächlich  $A^{-1} = B$  gilt  
 (b) Wieso scheitert dieser Algorithmus, wenn  $A$  nicht invertierbar ist?

Sind folgende Matrizen invertierbar? Wenn ja, so berechnen Sie die inverse Matrix mit Hilfe des oben beschriebenen Gauß-Algorithmus.

(c) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(e) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe G2** (Inverse und Transponierte einer Matrix)

Es sei  $A$  eine invertierbare  $n \times n$ -Matrix mit der inversen Matrix  $A^{-1}$ .

Zeigen Sie, dass dann auch die Matrix  $A^T$  invertierbar ist und geben Sie die zugehörige inverse Matrix an.

**Aufgabe G3** (Gruppen)

Wir betrachten die Teilmenge  $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \exists B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ mit } A \cdot B = B \cdot A = E_n\}$  der invertierbaren  $n \times n$ -Matrizen.

- (a) Zeigen Sie, dass  $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot, E_n)$  ein Gruppe ist (dabei bezeichnet  $\cdot$  die bekannte Matrixmultiplikation). Machen Sie sich dazu als Erstes klar, welche **vier** Aussagen nötig sind um dies zu zeigen.  
 (b) Ist die Gruppe  $GL_n(\mathbb{R})$  abelsch? Beweisen Sie ihre Antwort für den Spezialfall  $n = 3$ .

**Aufgabe G4** (Symmetrische Gruppen)

Wir betrachten in dieser Aufgabe die im Tutorium 2 eingeführte Menge  $S_n$  aller  $n$ -stelligen Permutationen.

$\circ : S_n \times S_n \rightarrow S_n$  bezeichnet die bereits eingeführte Verkettung von Permutationen.

- (a) Zeigen Sie, dass  $\circ$  auf  $S_n$  assoziativ ist. Tipp: Betrachten Sie die Permutationen in dieser Teilaufgabe am besten als Abbildungen von  $\{1, \dots, n\}$  in sich.  
 (b) Berechnen Sie alle möglichen Verkettungen von Elementen in  $S_3$ . Stellen Sie diese in einer Verknüpfungstabelle dar.  
 (c) Zeigen Sie, dass  $S_3$  mit der Verkettung  $\circ$  eine Gruppe bildet. Was ist das neutrale Element?  
 (d) (\*) Welche Elemente von  $S_3$  haben eine gerade Anzahl von Fehlständen (Definition siehe Tutorium 2)?  
 (e) (\*) Eine Untergruppe einer gegebenen Gruppe  $G$  ist eine Teilmenge von  $G$ , die mit der Operation und dem neutralen Element von  $G$  selbst wieder eine Gruppe bildet.  
 Ist die Teilmenge der Permutationen mit gerader Anzahl von Fehlständen in  $S_3$  eine Untergruppe?  
 (f) (\*) Geben Sie alle Untergruppen von  $S_3$  an.  
 (g) (\*) Zeigen Sie, dass  $S_n$  für alle natürlichen Zahlen  $n$  eine Gruppe ist.