Lineare Algebra I
3. Tutorium
Lineare Gleichungssysteme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
5. November 2010

Aufgaben

Es soll in diesem Tutorium um einfache lineare Gleichungen und Gleichungssysteme gehen. Insbesondere wird auf die geometrische Interpretation der Lösungen eingegangen.

Aufgabe G1 (Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten)
Wir betrachten die lineare Gleichung

$$-2x_1 + x_2 = -2\,. \tag{1}$$

(a) Geben Sie die Lösung der Gleichung (1) in der Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ an. Dabei sollen a_1, a_2, b_1 und b_2 reelle Zahlen sein.
Die Angabe der Lösung in dieser Form nennt man Vektorschreibweise.

(b) Bestimmen Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Graph die Lösungsmenge der Gleichung (1) ist. Skizzieren Sie den Graph von f. Wie hängt dieser Graph mit der Darstellung der Lösung aus dem ersten Aufgabenteil zusammen?

(c) Lösen Sie auf analoge Weise die Gleichung $2x_1 + 3x_2 = 10$ einmal in Vektorschreibweise und einmal als Graph einer linearen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(d) Nun betrachten wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} -2x_1 & + & x_2 & = & -2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 10\,, \end{array}$$

welches aus den beiden bisher betrachteten Gleichungen besteht. Bestimmen sie alle Lösungen dieses Systems! Wie lässt sich die Lösung geometrisch interpretieren.

Lösung:

(a) Durch Umstellen der Gleichung (1) ergibt sich $x_1 = 1 + \frac{1}{2}x_2$. Indem man $x_2 = \lambda$ setzt erhält man

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Alternativ kann man die Gleichung zu $x_2 = -2 + 2x_1$ umstellen und erhält mit $x_1 = \lambda$ die Darstellung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Natürlich sind auch andere Darstellungen vorstellbar.

(b) Aus der zu (1) äquivalenten Gleichung $x_2 = -2 + 2x_1$ ergibt sich sofort die Abbildungsvorschrift

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; x_1 \mapsto -2 + 2x_1\,.$$

In der Darstellung (3) entspricht der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gerade der Richtung der linearen Funktion f während $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein Punkt auf dem Graphen von f ist. In der Darstellung (2) gilt ähnliches. Hier muss man allerdings die Rollen von x und y vertauschen. Entsprechend betrachtet man als Funktion die Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; x_2 \to 1 + \frac{1}{2}x_2$.

(c) Durch Umstellen ergibt sich $x_2 = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x_1$. Die Vektorschreibweise ist dann

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} .$$

Als Abbildungsvorschrift ergibt sich $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; x \mapsto \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x$.

(d) Die einzige Lösung des Gleichungssystems ist $(x_1, x_2) = (2, 2)$. Dies ist genau der Schnittpunkt der beiden Geraden $f(\mathbb{R})$ und $g(\mathbb{R})$.

Aufgabe G2 (Geometrische Interpretation von linearen Gleichungssystemen)
Die Geometrische Interpretation aus der letzten Aufgabe lässt sich auch allgemein anwenden. Die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ mit $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ lässt sich immer als Gerade im $\mathbb{R}^2$ darstellen.
Sei nun ein Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 , \end{array}$$

gegeben, bei dem $(a_{11}, a_{12}) \neq (0, 0)$ und $(a_{21}, a_{22}) \neq (0, 0)$ gilt. Dann werden die Lösungen der beiden einzelnen Gleichungen durch 2 Geraden g und h beschrieben.

(a) Welche möglichen Lagebeziehungen gibt es zwischen den Geraden g und h und was kann man in den einzelnen Fällen über die Lösungen des Gleichungssystems aussagen.

(b) Ähnliche Betrachtungen kann man auch im Dreidimensionalen anstellen. Dabei ist die Lösungsmenge jeder Gleichung der Form $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ mit $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ eine Ebene in $\mathbb{R}^3$.
Betrachten Sie die einfache Beispielgleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ und machen Sie sich klar, dass dies eine Ebene ist, indem sie die Lösung der Gleichung in Vektorenschreibweise angeben.
Wie verhält sich der Vektor $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu dieser Ebene?

(c) Wir betrachen jetzt ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 . \end{array}$$

Die Lösungsmenge der ersten Gleichung sei eine Ebene E_1, die der Zweiten eine Ebene E_2 und die der Dritten eine Ebene E_3. Die Lösungen des Gleichungssystems sind dann gerade die gemeinsamen Punkte der 3 Ebenen E_1, E_2 und E_3. Welche geometrischen Formen können als Lösungsmenge auftreten und wie müssen die drei Ebenen in den einzelnen Fällen zueinander liegen?

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 . \end{array}$$

Lösung:

(a) Es gibt 3 Fälle für die Lage der beiden Geraden g und h:

i. g und h schneiden sich in einem Punkt. Dann ist dieser Schnittpunkt die einzige Lösung des Gleichungssystems.

ii. g und h sind parallel und haben keinen Punkt gemeinsam. In diesem Fall hat das Gleichungssystem keine Lösung.

iii. g und h sind identisch. In diesem Fall sind alle Punkte auf der Geraden $g = h$ Lösungen des Gleichungssystems. Insbesondere gibt es also unendlich viele Lösungen.

(b) Es gilt hier $x_1 = 1 - x_2 - x_3$. Man setzt nun $x_2 = \lambda$ und $x_3 = \mu$. Damit ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Vektordarstellung. Dies ist gerade die Parameterdarstellung einer Ebene. Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Punkt auf der Ebene, die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ spannen von diesem Punkt aus die Ebene auf.

Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf den aufspannenden Vektoren, ist also Normalenvektor der Ebene. Dies gilt, da die entsprechenden Skalarprodukte Null sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0\,.$$

Auch bei der allgemeinen Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ ist der Vektor $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ immer ein Normalenvektor der zur Gleichung gehörenden Ebene.

(c) Zunächst ist klar, dass sich zwei Ebenen immer entweder in einer Gerade schneiden oder keinen Punkt gemeinsam haben (insbesondere sind sie dann parallel) oder identisch sind. Daraus ergeben sich für 3 Ebenen die Fälle

  i. Die Lösungsmenge ist eine Gerade. Dies ist der Fall, wenn sich alle drei Ebenen in derselben Gerade schneiden oder wenn zwei der Ebenen identisch sind und die dritte Ebene diese in einer Geraden schneidet.
  ii. Die Lösungsmenge ist ein Punkt, wenn sich die drei Ebenen paarweise in drei verschiedenen Geraden schneiden und diese Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.
  iii. Die Lösungsmenge ist eine Ebene, wenn alle drei Ebenen identisch sind.
  iv. Die Lösungsmenge ist leer. Dies geschieht wenn zwei der Ebenen parallel aber nicht identisch sind oder wenn sich die drei Ebenen paarweise in drei verschiedenen Geraden schneiden, wobei diese drei Geraden keinen gemeinsamen Punkt haben.

(d) Die einzige Lösung ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dies lässt sich leicht durch umstellen der Gleichungen ermitteln. Es ist aber auch möglich geometrische Betrachtungen anzustellen.

Aufgabe G3 (Ein geometrisches Beispiel für ein lineares Gleichungssystem)
In dieser Aufgabe soll der Mittelpunkt und der Radius eines Kreises bestimmt werden, auf dem die Punkte $(-1,3), (0,4)$ und $(4,-2)$ liegen.
Allgemein ist ein Kreis im $\mathbb{R}^2$ gegeben durch eine Gleichung der Form

$$(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = c \tag{1}$$

mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $c > 0$.

(a) Welche geometrischen Größen des Kreises werden durch die Konstanten a, b und c beschrieben?

(b) Um die Konstanten a, b und c mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems bestimmen zu können muss man zunächst eine Umformung durchführen. Ausmultiplizieren der Gleichung (1) und Subtrahieren von $a^2 + b^2$ ergibt die Gleichung $x_1^2 - 2ax_1 + x_2^2 - 2bx_2 = c - a^2 - b^2$. Setzt man nun noch $\widetilde{c} = c - a^2 - b^2$, so erhält man die Gleichung

$$x_1^2 - 2ax_1 + x_2^2 - 2bx_2 = \widetilde{c}\,. \tag{2}$$

Welche Bedingungen müssen nun für die Konstanten a, b und $\widetilde{c}$ gelten, damit die Gleichung (2) einen Kreis beschreibt?

(c) Berechnen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises durch die Punkte $(-1,3), (0,4)$ und $(4,-2)$ indem Sie die Werte in die Gleichung (2) einsetzen und das zugehörige Gleichungssystem lösen.

Lösung:

(a) Der Punkt (a, b) ist der Mittelpunkt des Kreises. Das Quadrat des Radius ist c.

(b) Es muss natürlich $a, b, \tilde{c} \in \mathbb{R}$ gelten. Eine weitere Bedingung ergibt sich aus $0 < c = \tilde{c} + a^2 + b^2$, d.h es muss $\tilde{c} > -a^2 - b^2$ gelten.

(c) Durch Einsetzen der Werte in die Gleichung (2) erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2a & + & 9 & - & 6b & = & \tilde{c} \\ 0 & - & 0 & + & 16 & - & 8b & = & \tilde{c} \\ 16 & - & 8a & + & 4 & + & 4b & = & \tilde{c}\,. \end{array}$$

Daraus ergibt sich durch vertauschen der letzten beiden Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} 2a & - & 6b & - & \tilde{c} & = & -10 \\ -8a & + & 4b & - & \tilde{c} & = & -20 \\ & - & 8b & - & \tilde{c} & = & -16\,. \end{array}$$

Addiert man das 4-fache der ersten Gleichung zur zweiten, so ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccc} 2a & - & 6b & - & \tilde{c} & = & -10 \\ & - & 20b & - & 5\tilde{c} & = & -60 \\ & - & 8b & - & \tilde{c} & = & -16\,. \end{array}$$

Nun dividiert man die Zweite Gleichung durch -5 und erhält

$$\begin{array}{ccccccc} 2a & - & 6b & - & \tilde{c} & = & -10 \\ & + & 4b & + & \tilde{c} & = & 12 \\ & - & 8b & - & \tilde{c} & = & -16\,. \end{array}$$

Durch Addition des zweifachen der zweiten Gleichung zur Dritten ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccc} 2a & - & 6b & - & \tilde{c} & = & -10 \\ & + & 4b & + & \tilde{c} & = & 12 \\ & & & + & \tilde{c} & = & 8\,. \end{array}$$

Nun kann man die Lösung berechnen:

$$\begin{aligned} \tilde{c} &= 8 \\ b &= \frac{12 - \tilde{c}}{4} = \frac{12 - 8}{4} = 1 \\ a &= \frac{-10 + \tilde{c} + 6b}{2} = \frac{-10 + 8 + 6}{2} = 2\,. \end{aligned}$$

Weiter ergibt sich $c = \tilde{c} + a^2 + b^2 = 8 + 2^2 + 1^2 = 13$.
Der Mittelpunkt des Kreises ist also der Punkt $(2, 1)$ und der Radius ist $\sqrt{13}$.