Lineare Algebra I
3. Tutorium
Lineare Gleichungssysteme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Susanne Kürsten

WS 2010/2011
4. November 2010

Aufgaben

Es soll in diesem Tutorium um einfache lineare Gleichungen und Gleichungssysteme gehen. Insbesondere wird auf die geometrische Interpretation der Lösungen eingegangen.

Aufgabe G1 (Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten)
Wir betrachten die lineare Gleichung

$$-2x_1 + x_2 = -2\,. \tag{1}$$

(a) Geben Sie die Lösung der Gleichung (1) in der Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ an. Dabei sollen a_1, a_2, b_1 und b_2 reelle Zahlen sein.
Die Angabe der Lösung in dieser Form nennt man Vektorschreibweise.

(b) Bestimmen Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Graph die Lösungsmenge der Gleichung (1) ist. Skizzieren Sie den Graph von f. Wie hängt dieser Graph mit der Darstellung der Lösung aus dem ersten Aufgabenteil zusammen?

(c) Lösen Sie auf analoge Weise die Gleichung $2x_1 + 3x_2 = 10$ einmal in Vektorschreibweise und einmal als Graph einer linearen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(d) Nun betrachten wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} -2x_1 & + & x_2 & = & -2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 10\,, \end{array}$$

welches aus den beiden bisher betrachteten Gleichungen besteht. Bestimmen sie alle Lösungen dieses Systems! Wie lässt sich die Lösung geometrisch interpretieren.

Aufgabe G2 (Geometrische Interpretation von linearen Gleichungssystemen)
Die Geometrische Interpretation aus der letzten Aufgabe lässt sich auch allgemein anwenden. Die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ mit $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ lässt sich immer als Gerade im $\mathbb{R}^2$ darstellen.
Sei nun ein Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2\,, \end{array}$$

gegeben, bei dem $(a_{11}, a_{12}) \neq (0, 0)$ und $(a_{21}, a_{22}) \neq (0, 0)$ gilt. Dann werden die Lösungen der beiden einzelnen Gleichungen durch 2 Geraden g und h beschrieben.

(a) Welche möglichen Lagebeziehungen gibt es zwischen den Geraden g und h und was kann man in den einzelnen Fällen über die Lösungen des Gleichungssystems aussagen.

(b) Ähnliche Betrachtungen kann man auch im Dreidimensionalen anstellen. Dabei ist die Lösungsmenge jeder Gleichung der Form $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ mit $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ eine Ebene in $\mathbb{R}^3$.
Betrachten Sie die einfache Beispielgleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ und machen Sie sich klar, dass dies eine Ebene ist, indem sie die Lösung der Gleichung in Vektorenschreibweise angeben.
Wie verhält sich der Vektor $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu dieser Ebene?

(c) Wir betrachen jetzt ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3\,. \end{array}$$

Die Lösungsmenge der ersten Gleichung sei eine Ebene E_1, die der Zweiten eine Ebene E_2 und die der Dritten eine Ebene E_3. Die Lösungen des Gleichungssystems sind dann gerade die gemeinsamen Punkte der 3 Ebenen E_1, E_2 und E_3. Welche geometrischen Formen können als Lösungsmenge auftreten und wie müssen die drei Ebenen in den einzelnen Fällen zueinander liegen?

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0\,. \end{array}$$

Aufgabe G3 (Ein geometrisches Beispiel für ein lineares Gleichungssystem)
In dieser Aufgabe soll der Mittelpunkt und der Radius eines Kreises bestimmt werden, auf dem die Punkte $(-1,3), (0,4)$ und $(4,-2)$ liegen.
Allgemein ist ein Kreis im $\mathbb{R}^2$ gegeben durch eine Gleichung der Form

$$(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = c \tag{1}$$

mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $c > 0$.

(a) Welche geometrischen Größen des Kreises werden durch die Konstanten a, b und c beschrieben?

(b) Um die Konstanten a, b und c mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems bestimmen zu können muss man zunächst eine Umformung durchführen. Ausmultiplizieren der Gleichung (1) und Subtrahieren von $a^2 + b^2$ ergibt die Gleichung $x_1^2 - 2ax_1 + x_2^2 - 2bx_2 = c - a^2 - b^2$. Setzt man nun noch $\widetilde{c} = c - a^2 - b^2$, so erhält man die Gleichung

$$x_1^2 - 2ax_1 + x_2^2 - 2bx_2 = \widetilde{c}\,. \tag{2}$$

Welche Bedingungen müssen nun für die Konstanten a, b und $\widetilde{c}$ gelten, damit die Gleichung (2) einen Kreis beschreibt?

(c) Berechnen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises durch die Punkte $(-1,3), (0,4)$ und $(4,-2)$ indem Sie die Werte in die Gleichung (2) einsetzen und das zugehörige Gleichungssystem lösen.