Lineare Algebra I
2. Tutorium
Permutationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux

WS 2010/2011
28. Oktober 2010

Unter einer *Permutation* versteht man allgemein eine Umordnung, d.h. die Änderung der Reihenfolge einer Menge von Objekten. Wir betrachten hier Permutationen der endlichen Menge $\{1,2,3,\ldots,n\}$.

Wir definieren: Eine *(n-stellige) Permutation* ist eine bijektive Abbildung der Menge $\{1,2,3,\ldots,n\}$ in sich. Die Menge aller n-stelligen Permutationen bezeichnet man als *symmetrische Gruppe* S_n.

Aufgaben

Aufgabe G1 (Schreibweisen für Permutationen)
Sei σ eine Permutation. Da die Abbildung σ auf einer endlichen Menge definiert ist, kann man einfach die Bilder der Zahlen $\{1,2,3,\ldots,n\}$ einzeln angeben, um σ eindeutig festzulegen. Zum Beispiel ist durch

$$1 \mapsto 4, \qquad 2 \mapsto 1, \qquad 3 \mapsto 3, \qquad 4 \mapsto 2$$

eine vierstellige Permutation gegeben.

Eine andere häufig benutzte Möglichkeit, eine Permutation anzugeben, ist die sogenannte *Matrixschreibweise*. Hier werden die Bilder der einzelnen Zahlen $1,2,3,\ldots,n$ in Form einer Tabelle angegeben, in der ersten Zeile die Elemente von $\{1,2,3,\ldots,n\}$ (meistens in aufsteigender Reihenfolge), in der zweiten Zeile jeweils darunter die Bilder dieser Elemente; die Tabelle wird in runde Klammern gesetzt:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Die anfangs als Beispiel angegebene vierstellige Permutation wäre in dieser Schreibweise durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder auch durch} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Bei der sogenannten *Tupelschreibweise* gibt man in einer Zeile nacheinander die Bilder der Zahlen $1,2,3,\ldots,n$, durch Kommata getrennt, als ein n-Tupel an:

$$\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)).$$

Unsere obige Beispielpermutation würde also $(4,1,3,2)$ notiert werden.

Bei der *Zykelschreibweise* geht man wie folgt vor: Man beginnt mit einem (beliebigen) Element $a \in \{1,2,3,\ldots,n\}$, ermittelt das Bild $\sigma(a)$ dieses Elementes, dann $\sigma(\sigma(a))$, dann $\sigma(\sigma(\sigma(a)))$, usw. Nach einer Anzahl von Schritten gelangt man wieder zum Element a zurück, mit anderen Worten, man hat einen *Zykel* der Permutation gefunden. Man schreibt nun $(a\ \sigma(a)\ \sigma^2(a)\ \ldots\ \sigma^k(a))$ auf, wobei $\sigma^k(a)$ das letzte Element der Folge ist, bevor man zu a zurückgelangt. Dann fährt man mit einem anderen Element, das noch nicht notiert wurde, fort und schreibt den entstehenden Zykel wieder in Klammern auf. Dies wiederholt man solange, bis alle Elemente notiert wurden.

Im obigen Beispiel erhält man, wenn man mit 1 beginnt, zunächst den Zykel (142), denn es gilt $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$. Das einzige verbleibende Element ist 3, es wird auf sich selbst abgebildet und erzeugt damit einen Zykel (3) der Länge eins. Die obige Beispielpermutation lautet also in Zykelschreibweise $(142)(3)$.

Oft werden Zykel der Länge eins wieder gestrichen, so dass man stattdessen im Beispiel auch einfach (142) für σ schreiben kann.

(a) Notieren Sie die folgende Permutationen in Zykelschreibweise:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho = (5,4,3,2,1).$$

(b) Geben Sie die folgenden siebenstelligen Permutationen in Matrixschreibweise an:

$$\pi = (1\ 6\ 4)(2\ 5)(3\ 7), \quad \phi = (1\ 2\ 3\ 4), \quad \psi = (1).$$

Lösung:

(a) In Zykelschreibweise: $\sigma = (1734)(25)(6)$, $\tau = (12)(34)$, $\rho = (15)(24)(3)$, dabei ist die Reihenfolge der Zykel egal, und auch innerhalb eines Zykels können die Elemente rotiert werden. Außerdem dürfen Zykel der Länge eins weggelassen werden. Es gilt also auch etwa $\sigma = (52)(7341)$.

(b) In Matrixschreibweise:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 7 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G2 (Verkettung von Permutationen)

(a) Zeigen Sie: Die Verkettung zweier bijektiver Abbildungen ist bijektiv. (Insbesondere ist also die Verkettung zweier n-stelliger Permutationen wieder eine n-stellige Permutation.)

(b) Stellen Sie das Ergebnis der beiden folgenden Verkettungen von Permutationen jeweils in Matrixschreibweise dar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad (15)(23) \circ (135)(24) \in \mathrm{S}_5.$$

(c) Finden Sie zwei Elemente σ und τ aus S_3, die nicht kommutieren, also so, dass

$$\sigma \circ \tau \quad \neq \quad \tau \circ \sigma$$

gilt. Können Sie mit Hilfe dieser beiden Elemente zeigen, dass die Verkettung in S_n für $n \geq 3$ nicht kommutativ ist? Was gilt für S_1 und S_2?

(d) Bestimmen Sie jeweils die Umkehrabbildung für die beiden folgenden Permutationen aus S_5:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \tau = (134)(25).$$

Lösung:

(a) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ injektiv. Seien $x, y \in A$ mit $x \neq y$. Da f injektiv, folgt $f(x) \neq g(x)$. Da auch g injektiv, folgt $g(f(x)) \neq g(f(y))$. Dies zeigt, dass $g \circ f$ injektiv ist.

Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ surjektiv. Sei $c \in C$. Da g surjektiv ist, gibt es ein $b \in B$ mit $g(b) = c$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = b$; es folgt $g(f(a)) = g(b) = c$. Dies zeigt, dass $g \circ f$ surjektiv ist.

(b) Die Verkettungen sind gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(c) Dies gilt für je zwei verschiedene Elemente von S_3, von denen keines die identische Abbildung auf $\{1,2,3\}$ ist. Zum Beispiel gilt in Tupelschreibweise: $(3,2,1) \circ (1,3,2) = (3,1,2)$ und $(1,3,2) \circ (3,2,1) = (2,3,1)$. Man kann aus diesen zwei Elementen zwei nicht kommutierende Elemente aus S_n erhalten, indem man die Abbildung auf $\{1,2,3\}$ durch σ bzw. τ definiert und durch die Identität auf $\{4,5,6,\ldots,n\}$.

(d) Bei einer Permutation in Matrixschreibweise erhält man die Umkehrabbildung einfach dadurch, dass man die erste und zweite Zeile vertauscht:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Umkehrabbildung der zweiten Permutation ist durch $\tau^{-1} = (143)(25)$ gegeben.

Aufgabe G3 (Fehlstände)
Sei $\sigma \in \mathrm{S}_n$ eine Permutation. Jedes Paar $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\} \times \{1,2,\dots,n\}$ mit $i < j$, für das $\sigma(i) > \sigma(j)$ gilt, nennen wir einen *Fehlstand* oder auch eine *Inversion* von σ. Zum Beispiel wären für die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

genau die Paare $(1,2)$, $(1,4)$, $(3,4)$ die Fehlstände von σ.

(a) Bestimmen Sie alle Fehlstände von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) (*) Bestimmen Sie die Fehlstände aller Elemente von S_3.

(c) (*) Was ist die maximale Anzahl von Fehlständen, die eine Permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ haben kann? Geben Sie eine Permutation an, die diese maximale Anzahl von Fehlständen besitzt.

Lösung:

(a) Die Fehlstände sind $(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(4,5),(4,6)$.

(b)

Permutation	(1,2,3)	(1,3,2)	(2,1,3)	(2,3,1)	(3,1,2)	(3,2,1)
Anzahl Fehlstände	0	1	1	2	2	3

(c) Bei einer n-stellige Permutation gibt es $1+2+\ldots+(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ Paare $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\} \times \{1,2,\dots,n\}$ mit $i < j$. Also kann es höchstens diese Anzahl von Fehlständen geben. Bei der Permutation $(n, n-1, \dots, 3, 2, 1)$ jedes Paar (i,j) mit $i < j$ ein Fehlstand, die Anzahl der Fehlstände ist hier also genau $\frac{1}{2}n(n-1)$.