Lineare Algebra I
1. Tutorium
Relationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux

WS 2010/2011
25. Oktober 2010

Aufgaben

Eine *Relation* ist allgemein eine Beziehung, die zwischen zwei Objekten bestehen kann. Im mathematischen Sinne wird eine Relation definiert als eine Teilmenge R des kartesischen Produkts $A \times B$ zweier Mengen A und B. Wir sagen das Paar $(a, b) \in A \times B$ *erfüllt* die Relation R genau dann, wenn $(a, b) \in R$. Oft schreibt man kurz aRb für die Aussage $(a, b) \in R$. Manchmal wird die Teilmenge $R \subseteq A \times B$ auch als *Graph* der Relation bezeichnet.

Aufgabe G1 (Beispiele)
Wir beginnen mit ein paar einfachen Beispielen von Relationen. Dazu wählen wir die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und betrachten verschiedene Relationen auf $M \times M$.

(a) "x ist kleiner als y"

(b) "x ist kleiner oder gleich als y"

(c) "Die Differenz $x - y$ ist durch 2 teilbar."

Stellen Sie die Menge $M \times M$ von geordneten Paaren der Zahlen $1, 2, 3, 4, 5$ in Form einer Tabelle dar und markieren Sie jeweils für die obigen Relationen R, welche Paare (x, y) die Relation erfüllen.

Lösung:

	1	2	3	4	5
1		R	R	R	R
2			R	R	R
3				R	R
4					R
5					

	1	2	3	4	5
1	R	R	R	R	R
2		R	R	R	R
3			R	R	R
4				R	R
5					R

	1	2	3	4	5
1	R		R		R
2		R		R	
3	R		R		R
4		R		R	
5	R		R		R

Aufgabe G2 (Eigenschaften von Relationen)
Sei M eine Menge. Eine Relation R über $M \times M$ kann folgende Eigenschaften haben:

(a) *reflexiv:* $\forall x \in M : xRx$

(b) *symmetrisch:* $\forall x \in M : \forall y \in M : xRy \Rightarrow yRx$

(c) *transitiv:* $\forall x \in M : \forall y \in M : \forall z \in M : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$

(d) *antisymmetrisch:* $\forall x \in M : \forall y \in M : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$

(e) *total:* $\forall x \in M : \forall y \in M : xRy \vee yRx$

Entscheiden Sie für die folgenden Relationen, welche der obigen Eigenschaften zutreffen.

(a) Sei M die Menge der Einwohner Darmstadts und R die Relation "x wohnt im selben Stadtteil wie y".

(b) Sei $M = \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und sei R die Relation "x ist kleiner oder gleich y".

(c) Sei $M = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null und sei R die Relation "x ist Teiler von y".

(d) Sei $M = \mathscr{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ die Menge aller Teilmengen von $\{1, 2\}$ und sei R die Relation "x ist Teilmenge von y".

Eine Relation auf $M \times M$ heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist; sie heißt *Halbordnung*, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Ein Halbordnung, die total ist, heißt *Totalordnung*. Entscheiden Sie, welche der drei genannten Begriffe auf die obigen Beispiele von Relationen zutreffen.

Lösung:

(a)
- R ist reflexiv, weil x im selben Stadtteil wie x wohnt.
- Wenn x im selben Stadtteil wie y wohnt, so wohnt y im selben Stadtteil wie x. Deshalb ist R symmetrisch.
- Seien x, y und z drei Bewohner Darmstadt. Angenommen, dass x im selben Stadtteil wie y wohnt und y im selben Stadtteil wie z wohnt. Daraus folgt, daßx im selben Stadtteil wie z wohnt. Das heißt, R ist transitiv.
- Angenommen, dass es einen Stadtteil gibt, wo mindestens zwei verschiedene Personen wohnen. Seien x und y solche Personen. Wegen der Annahme wohnt x im selben Stadtteil wie y. Wegen der Annahme wohnt auch y im selben Stadtteil wie x. Nach Annahme sind x und y ungleich. Daraus folgt, dass R nicht antisymmetrisch ist.
- Angenommen, dass es zwei Stadtteile gibt, wo mindestens eine Person wohnt. Seien x und y zwei Bewohner verschiedener Stadtteile. x wohnt nicht im selben Stadtteil wie y und y wohnt nicht im selben Stadtteil wie x. Daraus folgt, dass R nicht total ist.

(b) Die Relation $\leq$ ist reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und total. Sie ist aber nicht symmetrisch.

(c) Die Relation ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch. Sie ist aber nicht symmetrisch und nicht total. Z.B. is 2 kein Teiler von 3 und 3 ist auch kein Teiler von 2.

(d) Die Relation ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch. Sie ist aber nicht symmetrisch und nicht total. Z.B. ist $\{1\}$ keine ist Teilmenge von $\{2\}$ und $\{2\}$ ist auch keine ist Teilmenge von $\{1\}$.

Somit ist (a) eine Äquivalenzrelation, (b), (c) und (d) sind Halbordnungen, (b) sogar eine Totalordnung.

Aufgabe G3 (Äquivalenzrelationen und Partitionen)
Eine Partition ist eine Zerlegung einer Menge in nichtleere disjunkte Teilmengen. (Zwei Mengen heißen *disjunkt*, wenn ihre Schnittmenge leer ist.)

(a) Ermitteln Sie alle Partitionen der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$.

(b) Sei nun

$$M = \bigcup_{j \in J} M_j$$

eine Partition von M, d.h. es gilt $M_{j_1} \cap M_{j_2} = \emptyset$, falls $j_1 \neq j_2$. Begründen Sie, warum durch

$$(x, y) \in A :\Longleftrightarrow \exists j \in J : (x \in M_j) \wedge (y \in M_j)$$

eine Äquivalenzrelation definiert ist.

(c) Sei nun M eine Menge und sei $A \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation. Wir definieren zu jedem Element $x \in M$ eine Teilmenge von M wie folgt. Sei $x \in M$. Dann sei

$$[x] := \{y \in M \mid xAy\}$$

definiert. Wir nennen $[x]$ die *Äquivalenzklasse* von x. Aus welcher der drei definierenden Eigenschaften einer Äquivalenzrelation folgt, dass stets

$$x \in [x]$$

gilt?

(d) Beweisen Sie nun: Sind zwei Elemente x und y aus der Menge M gegeben, dann stimmen entweder die zugehörigen Äquivalenzklassen $[x]$ und $[y]$ überein oder sind disjunkt. Gehen Sie dabei wie folgt vor: Nehmen Sie an, dass $z \in [x] \cap [y]$ gilt und zeigen Sie, dass daraus für jedes Element $a \in [x]$ auch $a \in [y]$ folgt.

Bemerkung: Die letzten beiden Teilaufgaben zeigen, dass für jede Äquivalenzrelation auf M die Äquivalenzklassen eine Partition von M liefern.

Lösung:

(a)
- $\{\{1, 2, 3, 4\}\}$ ist die triviale Partition mit einem Element.
- $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ ist die triviale Partition mit vier Elementen.
- $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ und $\{\{4, 1, 2\}, \{3\}\}$ und $\{\{3, 4, 1\}, \{2\}\}$ und $\{\{2, 3, 4\}, \{1\}\}$ sind Partitionen mit zwei Elementen.
- $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ und $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ und $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ sind die anderen Partitionen mit zwei Elementen.
- $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$ und $\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\}$ und$\{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}\}$ und $\{\{2, 3\}, \{1\}, \{4\}\}$ und $\{\{2, 4\}, \{1\}, \{3\}\}$ und $\{\{3, 4\}, \{1\}, \{2\}\}$ sind die Partitionen mit drei Elementen.

(b)
- Reflexivität: Sei $x \in M$. Wegen $M = \bigcup_{j\in J} M_j$ und der Definition der Vereinigung gibt es $j \in J$, so dass $x \in M_j$. Also $\exists j \in J : (x \in M_j) \wedge (x \in M_j)$ (wegen $(p \wedge p) \iff p$). Daraus folgt $(x,x) \in A$. Dies gilt für alle x in M, deshalb ist die Relation A reflexiv.
- Symmetrie: Seien x und y Elemente von M. Angenommen, dass $(x,y) \in A$, so folgt $\exists j \in J : (x \in M_j) \wedge (y \in M_j)$ wegen der Definition von A. Damit gilt auch $\exists j \in J : (y \in M_j) \wedge (x \in M_j)$ wegen der Kommutativität des Junktors $\wedge$, d.h. $(y,x) \in A$. Deshalb ist A symmetrisch.
- Transitivität: Seien x, y und z Elemente von M. Angenommen, dass $(x,y) \in A$ und $(y,z) \in A$. Wegen der Definition von A gibt es i und j von J, so dass $(x \in M_i) \wedge (y \in M_i)$ und $(y \in M_j) \wedge (y \in M_j)$. Es gilt $y \in M_i$ und $y \in M_j$, aber eine der Annahmen ist $M_{j_1} \cap M_{j_2} = \emptyset$, falls $j_1 \neq j_2$. Daraus folgt, dass $i = j$. Also $(x \in M_i) \wedge (z \in M_i)$, d.h. $(x,z) \in A$. Deshalb ist A transitiv.

(c) Das folgt aus der Reflexivität.

(d) Seien x und y zwei Elemente von M. Falls $[x] \cap [y] = \emptyset$, ist nichts zu zeigen. Nun angenommen, dass $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Dann gibt es ein z in $[x] \cap [y]$. Also gilt $z \in [x]$ und $z \in [y]$. Wegen der Definition von $[\cdot]$ gilt xAz und yAz, aus der Symmetrie folgt zAy und aus der Transitivität folgt xAy. Sei $a \in [x]$. Es gilt xAa (Definition), aAx (Symmetrie), aAy (Transitivität), yAa (Symmetrie) und $a \in [y]$ (Definition). Ebenso folgt aus $a \in [y]$, dass $a \in [x]$, d.h. $[x] = [y]$.