Lineare Algebra I
15. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
14. Februar 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Determinante)
Haben die folgenden Matrizen eine Determinante? Wenn ja, berechnen Sie diese.

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(e)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(f)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 45 & 12 & 17 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(g)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung: Für die Aufgabenteile (a)-(c) verwendet man die konkreten Formeln für die Determinante, die aus der Vorlesung bekannt sind. In Aufgabenteil (e) verwendet man, dass die Matrix obere Dreiecksgestalt hat, d.h. die Determinante ist das Produkt der Diagonaleinträge. Für Aufgabenteil (f) verwendet man, dass die Matrix Blockgestalt hat.

(a)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

(b)

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 2 = 6$$

(c)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 0$$

(d) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist nicht quadratisch und besitzt deswegen keine Determinante.

(e)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

(f)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 45 & 12 & 17 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \det(5) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = -2 \cdot 5 \cdot 0 = 0$$

(g) Da die dritte und vierte Zeile der gegebenen Matrix vielfache voneinander sind gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe G2 (Determinante und Rang (*))

(a) (*) Es sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$.
Zeigen Sie, dass

$$\det A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank} A < n$$

gilt.

(b) (*) Nun sei $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, wobei n und m natürliche Zahlen mit $n > m$ sind. Zeigen Sie, dass dann

$$\det(A \cdot B) = 0$$

gilt.

Lösung:

(a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ ist invertierbar}$$

und

$$A \text{ ist invertierbar } \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = n$$

gilt.
Daraus ergibt sich

$$\det A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank} A \neq n \Leftrightarrow \operatorname{rank} A < n\,.$$

w.z.b.w.

(b) Zunächst stellt man fest, dass $A \cdot B$ eine $n \times n$-Matrix ist.
Aus Übungsblatt 11 Aufgabe H2 ist bekannt, dass

$$\operatorname{rank}(A \cdot B) \leq \operatorname{rank} B$$

gilt. Da B eine $m \times n$-Matrix und der Rang die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren ist, gilt auch

$$\operatorname{rank} B \leq m\,.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\operatorname{rank}(A \cdot B) \leq m < n\,.$$

Wegen Aufgabenteil (a) ergibt sich daraus

$$\det A = 0\,.$$

w.z.b.w.