Probeklausur „Lineare Algebra I“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/11
15. Februar 2011

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punktzahl	10	10	10	10	10	10	60
erreichte Punktzahl							

Bitte beachten Sie: Geben Sie nicht nur Endergebnisse an, sondern auch den Lösungsweg. Die maximal mögliche Punktzahl wird nur auf vollständig richtig begründete Lösungen mit klar ersichtlichem Lösungsweg vergeben.

Diese Probeklausur können Sie wahlweise wie ein normales Übungsblatt oder eigenständig als Test ihres aktuellen Leistungsstandes bearbeiten.
Wenn Sie wissen möchten, wie Sie in dieser Klausur abgeschnitten hätten können Sie ihre Lösungen von ihrem Übungsleiter korrigieren lassen.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen.

Gehen Sie in der richtigen Klausur wie folgt vor:
Füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts am Anfang der Klausur in Blockschrift (Großbuchstaben) aus.
Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und nummerieren Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

In der Klausur werden als Hilfsmittel alle schriftlichen Unterlagen zugelassen sein. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Viel Erfolg!

Die Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (Lineare Abbildungen) (10 Punkte)

Sei eine Abbildung $\varphi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^3$ definiert durch

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 - x_5 \\ \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 \\ 8x_2 + x_3 - x_5 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie eine Matrix A, so dass $\varphi(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{Q}^5$ gilt. **2P.**

(b) Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Kernes und des Bildes der linearen Abbildung φ. **6P.**

(c) Bestimmen Sie den Rang von φ. **2P.**

Lösung:

(a) Aus der Definition der Matrixmultiplikaion erkennt man sofort, dass für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$Ax = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 - x_5 \\ \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 \\ 8x_2 + x_3 - x_5 \end{pmatrix} \qquad \forall\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^5 .$$

(b) Um eine Basis des Kerns von φ zu bestimmen berechnet man die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. Die zugehörige Matrixumformung ist folgende.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für ein Element

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \ker \varphi$$

ergibt sich also $x_1 = 4x_2, x_5 = 2x_1 + x_3$. D.h. es gilt

$$\begin{aligned} \ker \varphi &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{4} \cdot x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ 2x_1 + x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{Q} \right\} \\ &= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{Q} \right\} \\ &= \operatorname{spann} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Das in der letzten Zeile angegebene Erzeugendensystem von $\ker \varphi$ ist linear unabhängig, denn aus

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Q}$$

folgt sofort

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\,.$$

D.h.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

ist eine Basis von $\ker \varphi$.

Um eine Basis von $\operatorname{im} \varphi$ zu bestimmen betrachtet man zunächst die folgene Umformung.

$$\begin{aligned}
\operatorname{im} \varphi &= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, x_2, x_3, x_5 \in \mathbb{Q} \right\} \\
&= \operatorname{spann} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \operatorname{spann} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Der Zweite und der Dritte dieser erzeugenden Vektoren sind offensichtlich linear unabhängig (sie sind keine Vielfache voneinander).

Außerdem ergibt sich aus der bekannten Dimensionsformel für lineare Abbildungen

$$\dim(\operatorname{im} \varphi) = \dim \mathbb{Q}^5 - \dim(\ker \varphi) = 5 - 3 = 2\,.$$

Dies bedeutet, dass je zwei linear unabhängige Vektoren aus $\operatorname{im} \varphi$ eine Basis von $\operatorname{im} \varphi$ bilden.

Insbesondere ist

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $\operatorname{im} \varphi$. Das bedeutet auch, dass $\operatorname{im} \varphi$ ein zweidimensionaler Vektorraum ist.

(c) Mit Hilfe von Aufgabenteil (b) erhält man

$$\operatorname{rank} \varphi = \dim(\operatorname{im} \varphi) = 2\,.$$

2. Aufgabe (Untervektorräume) (10 Punkte)

Welche der folgenden Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^3$ sind ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antworten und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Basis von U.

(a)

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + 5x_2 = 0 \right\};$$

(b)

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = 1 \right\}.$$

10 P.

Lösung:

(a) U ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, denn es gelten die Unterraumkriterien, wie im folgenden gezeigt wird.

- $0 + 5 \cdot 0 = 0$. D.h. es gilt

  $$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U,$$

  also ist (U1) erfüllt.

- Für alle

  $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in U$$

  gilt $x_1 + 5x_2 = 0$ und $y_1 + 5y_2 = 0$. D.h. es ist auch

  $$(x_1 + y_1) + 5(x_2 + y_2) = (x_1 + 5x_2) + (y_1 + 5y_2) = 0.$$

  Es folgt

  $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \in U.$$

  Insbesondere gilt also das Unterraumkriterium (U2).

- Für alle

  $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U \text{ und } \lambda \in \mathbb{R}$$

  gilt $x_1 + 5x_2 = 0$ und damit auch

  $$\lambda x_1 + 5 \cdot (\lambda x_2) = \lambda(x_1 + 5x_2) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

  Daraus folgt

  $$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \in U.$$

  Insbesondere ist also das Unterraumkriterium (U3) erfüllt.

Alternativ kann man U als Lösung eines geeigneten homogenen linearen Gleichungssystems auf $\mathbb{R}^3$ definieren. Als solche muss U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ sein.

Zur Bestimmung einer Basis von U schreibt man U zunächst in der folgenden Gestalt.

$$\begin{aligned} U &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = -5x_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \cdot x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{spann} \left(\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Da aus

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sofort $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ folgt ist die Menge

$$\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

ein linear unabhängiges Erzeugendensystem und damit eine Basis von U.

(b) In diesem Fall ist U kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, dann es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$$

aber auch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U\,.$$

Dies widerspricht dem Unterraumkriterium (U2).

Alternativ kann man auch Widersprüche zu den anderen Unterraumkriterien konstruieren.

3. Aufgabe (Matrizen zu linearen Abbildungen) (10 Punkte)

Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Sei $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$. Seien e_1, e_2, e_3, e_4 die kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^4$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$B = (e_1,\ e_1 + e_2,\ e_1 + e_2 + e_3,\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$$

eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist. **3P.**

(b) Zeigen Sie, dass

$$C = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist. **3P.**

(c) Bestimmen Sie die Matrix $[\varphi]_C^B$ von φ bezüglich der Basen B und C. **4P.**

Lösung:

(a) Es ist bekannt, dass

$$\dim \mathbb{R}^4 = 4$$

gilt. D.h. jede Menge aus 4 linear unabhängigen Vektoren kann zu einer Basis aus 4 Vektoren ergänzt werden, ist also bereits selbst ein Basis des $\mathbb{R}^4$. D.h. man muss nur die lineare Unabhängigkeit der 4 gegebenen Vektoren zeigen. Für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2(e_1 + e_2) + \lambda_3(e_1 + e_2 + e_3) + \lambda_4(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \\
&= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

folgt in dieser Reihenfolge

$$\lambda_4 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0 \text{ und } \lambda_1 = 0\,.$$

D.h. die gegebene Menge ist linear unabhängig, also ein Basis des $\mathbb{R}^4$.

w.z.b.w.

(b) Analog zu Aufgabenteil (a) reicht es zu zeigen, dass die beiden gegebenen Vektoren linear unabhängig sind.

Für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

folgt sofort $\lambda_1 = 0$ und damit auch $\lambda_2 = 0$. Also sind die gegebenen Vektoren tatsächlich linear unabhängig.

D.h. C ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

w.z.b.w.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\varphi(e_1 + e_2) &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\varphi(e_1 + e_2 + e_3) &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\varphi(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Definition von Matrizen zu linearen Abbildungen bzgl. gegebener Basen ergibt sich daraus sofort

$$[\varphi]_C^B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man die Übergangsmatrizen R und S betrachten, deren Spalten die Vektoren aus C bzw. B sind. Die gesuchte Matrix ist dann $R^{-1}AS$.

4. Aufgabe (Matrizen) (10 Punkte)

Welche der folgenden reellen 3×3-Matrizen sind invertierbar? Begründen Sie Ihre Antworten und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10P.

Lösung:

- Die Spalten der Matrix A sind linear unabhängig, denn für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

folgt sofort $\lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$. D.h. es gilt

$$\operatorname{rank} A = 3\,.$$

Da eine quadratische Matrix genau dann invertierbar ist, wenn sie maximalen Rang hat, ist A invertierbar.

Zur Bestimmung der zu A inversen Matrix verwendet man wie folgt den Gauß-Algorithmus.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

D.h. es gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

- Die ersten zwei Spalten von B sind gleich. Insbesondere sind die Spalten von B nicht linear unabhängig und es gilt

$$\operatorname{rank} B < 3\,.$$

D.h. die Matrix B ist nicht invertierbar.

- Bekanntermaßen gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

  D.h. die Matrix C ist invertierbar und hat die Inverse

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C \, .$$

5. Aufgabe (Verschiedenes) (10 Punkte)

(a) Sei $\varphi : \mathbb{R}^{21} \to \mathbb{R}^7$ eine surjektive lineare Abbildung. Berechnen Sie die Dimension des Kernes von φ. **5P.**

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Für jede invertierbare $n \times n$-Matrix S gilt $\operatorname{tr}(S^{-1}) = \operatorname{tr}(S)^{-1}$. **5P.**

Lösung:

(a) Bekanntermaßen ist $\dim \mathbb{R}^n = n$. Damit folgt aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen.

$$\dim(\ker \varphi) = \dim \mathbb{R}^{21} - \dim(\operatorname{im} \varphi) = 21 - \dim \mathbb{R}^7 = 21 - 7 = 14 \, .$$

(b) Die gegebene Aussage gilt nicht. Ein mögliches Gegenbeispiel ist die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Für diese gilt

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Sie ist also insbesondere invertierbar und von der Gestalt $n \times n$ mit $n = 2$. Außerdem gilt für die Spuren

$$\operatorname{tr}(S)^{-1} = \left(\operatorname{tr} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = (2+1)^{-1} = \frac{1}{3} \neq \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1 = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{tr}(S^{-1}) \, .$$

6. Aufgabe (Vektorräume und lineare Abbildungen) (10 Punkte)

(a) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und sei $\varphi : V \to V$ ein linearer Endomorphismus, für den $\varphi \circ \varphi = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass dann

$$\operatorname{rank} \varphi \leq \frac{1}{2} \dim V$$

gilt. **5P.**

(b) Sei V ein Vektorraum und seien U_1, U_2 zwei Untervektorräume von V. Zeigen Sie: Gilt $V = U_1 \oplus U_2$, so ist V/U_2 isomorph zu U_1. **5P.**

Lösung:

(a) Zunächst wird gezeigt, dass im $\varphi \subseteq \ker\varphi$ gilt.
Sei dazu $v \in \text{im } \varphi$ ein beliebiges Element. Dann existiert ein Element $w \in V$ mit $\varphi(w) = v$. Daraus folgt

$$\varphi(v) = \varphi(\varphi(w)) = (\varphi \circ \varphi)(w) = 0\,.$$

Also ist $v \in \ker\varphi$.
Damit ist

$$\text{im } \varphi \subseteq \ker\varphi$$

gezeigt. D.h. insbesondere gilt

$$\dim(\text{im } \varphi) \leq \dim(\ker\varphi)\,.$$

Aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen folgt dann

$$\dim V = \dim(\text{im } \varphi) + \dim(\ker\varphi) \geq 2\dim(\text{im } \varphi)\,.$$

D.h. es ist

$$\operatorname{rank} \varphi = \dim(\text{im } \varphi) \leq \frac{1}{2}\dim V\,.$$

w.z.b.w.

(b) Es gelte also $V = U_1 \oplus U_2$.
Nach der Definition von der direkten Summe gilt

$$V = \{u_1 + u_2 \,|\, u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}\,,$$

wobei diese Darstellung eines Elements aus V als Summe von Elementen aus U_1 und U_2 eindeutig ist.
Wir betrachten nun die Abbildung

$$\varphi : V/U_2 \to U_1, \qquad (u_1 + u_2) + U_2 \mapsto u_1$$

und zeigen, dass diese ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

- Für $u_1, u_1' \in U_1, u_2, u_2' \in U_2$ mit
$$(u_1 + u_2) + U_2 = (u_1' + u_2') + U_2$$
gilt auch
$$(u_1 - u_1') + (u_2 - u_2') = (u_1 + u_2) - (u_1' + u_2') \in U_2\,.$$
D.h. es gibt ein $u \in U_2$ mit $(u_1 - u_1') + (u_2 - u_2') = 0 + u$. Da die Darstellung als eine solche Summe eindeutig ist (siehe oben), folgt hieraus
$$u_1 - u_1' = 0\,.$$
Insbesondere ist
$$\varphi\left((u_1 + u_2) + U_2\right) = u_1 = u_1' = \varphi\left((u_1' + u_2') + U_2\right)\,.$$
D.h. φ ist **wohldefiniert**.
- Für $u_1, u_1' \in U_1, u_2, u_2' \in U_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ gilt
$$\begin{aligned}\varphi\left((\lambda_1((u_1 + u_2) + U_2) + \lambda_2((u_1' + u_2') + U_2)\right) &= \varphi\left((\lambda_1(u_1 + u_2) + \lambda_2(u_1' + u_2')) + U_2)\right) \\ &= \varphi\left(((\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_1') + (\lambda_1 u_2 + \lambda_2 u_2')) + U_2\right) \\ &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_1' \\ &= \lambda_1 \varphi\left((u_1 + u_2) + U_2\right) + \lambda_2 \varphi\left((u_1' + u_2') + U_2\right)\,.\end{aligned}$$
D.h. φ ist **linear**.

- Für $u_1, u_1' \in U_1, u_2, u_2' \in U_2$ mit

$$\varphi\left((u_1+u_2)+U_2\right) = \varphi\left((u_1'+u_2')+U_2)\right)$$

  folgt:

$$u_1 = u_1' \Rightarrow (u_1+u_2)-(u_1'+u_2') = u_1-u_1'+u_2-u_2' = u_2-u_2' \in U_2\,.$$

  D.h. es gilt

$$(u_1+u_2)+U_2 = (u_1'+u_2')+U_2\,.$$

  Also ist φ **injektiv**.

- Für $u_1 \in U_1$ beliebig ist $(u_1+0)+U_2 \in V/U_2$ und es gilt

$$\varphi\left((u_1+0)+U_2\right) = u_1\,.$$

  D.h. φ ist **surjektiv**.

Insgesamt folgt, dass φ ein Isomorphismus ist und somit die Vektorräume V/U_2 und U_1 isomorph sind.

w.z.b.w.

Alternativ kann man diesen Aufgabenteil auch mit Hilfe des Satzes über die kanonische Faktorisierung zeigen.