Lineare Algebra I
13. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
7. Februar 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Basiswechsel)
$\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ bezeichne wie gewöhnlich die Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich n.
Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad \varphi(p)(x) := xp(x),$$

die Elemente $p_i(x) := x^i$, $q_i(x) := (x+1)^i$ für $i = 0, 1, \ldots, 3$ und die Basen

$$\begin{aligned} B : &= (p_0, p_1, p_2), \\ C : &= (p_0, p_1, p_2, p_3), \\ C' : &= (q_0, q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

von $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ bzw. von $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie $[\varphi]_C^B$ und $[\varphi]_{C'}^B$.

Lösung: Um $[\varphi]_C^B$ zu bestimmen, betrachten wir die Bilder der Basisvektoren aus B unter φ. Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi(p_0) &= p_1 \\ \varphi(p_1) &= p_2 \\ \varphi(p_2) &= p_3. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$[\varphi]_C^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $[\varphi]_{C'}^B = [\mathrm{id}]_{C'}^C [\varphi]_C^B$. Außerdem ist die Matrix $[\mathrm{id}]_{C'}^C$ gleich der zu $[\mathrm{id}]_C^{C'}$ Inversen Matrix. Um $[\mathrm{id}]_C^{C'}$ zu berechnen, stellen wir die Elemente von C' bzgl. der Basis C dar.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ (x+1) &= 1 + x \\ (x+1)^2 &= 1 + 2x + x^2 \\ (x+1)^3 &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Also gilt

$$[\mathrm{id}]_C^{C'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse dieser Matrix bestimmt man wie folgt mittels des Gauß-Algorithmus.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I-II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{I+III,\, II-2\cdot III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I-IV,\, II+3\cdot IV,\, III-3\cdot IV}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Es ergibt sich also

$$[\mathrm{id}]_{C'}^{C} = \left([\mathrm{id}]_{C}^{C'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D.h. es gilt

$$[\varphi]_{C'}^{B} = [\mathrm{id}]_{C'}^{C}[\varphi]_{C}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G2 (Projektionen)
Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum.
Wir betrachten in dieser Aufgabe lineare Abbildungen $\varphi : V \to V$ für die $\varphi^2 := \varphi \circ \varphi = \varphi$ gilt.

(a) Betrachten Sie zunächst als Beispiel die zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

gehörige lineare Abbildung

$$\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 .$$

Zeigen Sie, dass die Bedingung $\varphi_A^2 = \varphi_A$ erfüllt ist.

(b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild der Abbildung φ_A aus der letzten Teilaufgabe. Bestimmen Sie außerdem die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_A(x) = x\}$.

(c) Geben Sie eine Basis an, bezüglich der die Abbildung φ_A aus dem Aufgabenteil (a) die Gestalt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat.

(d) Ab jetzt sei V wieder ein beliebiger endlichdimensionaler Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\varphi^2 = \varphi$.
Zeigen Sie, dass $V = \ker\varphi \oplus \operatorname{im}\varphi$ gilt.

(e) Zeigen Sie

$$\{x \in V \mid \varphi(x) = x\} = \operatorname{im}\varphi .$$

(f) Gibt es immer eine Basis von V bezüglich der die Matrix von φ eine Einheitsmatrix eventuell ergänzt um Nullzeilen und/oder Nullspalten ist? Wenn ja, wie kann man eine solche Basis finden und wieviele Nullzeilen bzw. Nullspalten kommen vor?

Lösung:

(a) Da $\varphi_A \circ \varphi_A = \varphi_{A^2}$ gilt, muss man nur die Gleichung $A^2 = A$ überprüfen. Es gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A .$$

w.z.b.w.

(b) Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\varphi_A(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} .$$

Daran kann man sofort ablesen, dass

$$\begin{aligned}
\ker \varphi_A &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1 = -x_2 \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} , \\
\operatorname{im} \varphi_A &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1 = x_2 \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ und} \\
\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_A(x) = x\} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = x_1 = x_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1 = x_2 \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

gilt.

(c) Man betrachte die Basis

$$B = (v_1, v_2) \text{ mit } v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Aus dem letzten Aufgabenteil ist bekannt, dass $\varphi_A(v_1) = v_1$ und $\varphi_A(v_2) = 0$ gilt. Daraus ergibt sich

$$[\varphi]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

was die gesuchte Gestalt ist.

(d) Aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ergibt sich

$$\dim(\operatorname{im} \varphi) + \dim(\ker \varphi) = \dim V$$

Außerdem gilt bekanntermaßen

$$\dim(\ker \varphi + \operatorname{im} \varphi) = \dim(\ker \varphi) + \dim(\operatorname{im} \varphi) - \dim(\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi) = \dim V - \dim(\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi) .$$

Angenommen es gibt ein Element $v \in \ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi$. Dann existiert ein Element $w \in V$ mit $\varphi(w) = v$ und es folgt $v = \varphi(w) = \varphi^2(w) = \varphi(v) = 0$. D.h. es gilt $\dim(\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi) = 0$. Daraus folgt

$$\dim(\ker \varphi + \operatorname{im} \varphi) = \dim V$$

und wegen $\ker \varphi + \operatorname{im} \varphi \subset V$ folgt daraus $\ker \varphi + \operatorname{im} \varphi = V$. Da der Durchschnitt der Mengen auf der linken Seite $\{0\}$ ist folgt (mit Hilfe eines Satzes aus der Vorlesung)

$$\ker \varphi \oplus \operatorname{im} \varphi = V .$$

w.z.b.w.

(e) Ich bezeichne $M := \{x \in V \mid \varphi(x) = x\}$.

- Sei $x \in M$. Dann gilt $\varphi(x) = x$. Insbesondere gilt also $x \in \operatorname{im} \varphi$ und es folgt

$$M \subseteq \operatorname{im} \varphi .$$

- Sei $x \in \operatorname{im} \varphi$. Dann existiert ein $v \in V$ mit $\varphi(v) = x$. Es folgt

$$\varphi(x) = \varphi^2(v) = \varphi(v) = x .$$

insbesondere ist also $x \in M$. Daraus folgt

$$\operatorname{im} \varphi \subseteq M .$$

Insgesamt ergibt sich

$$M = \operatorname{im} \varphi \, .$$

w.z.b.w.

(f) Es gibt immer eine solche Basis. Man erhält sie, indem man eine Basis $v_1, \ldots, v_m$ von $\operatorname{im} \varphi$ und eine Basis $v_{m+1}, \ldots, v_n$ von $\ker \varphi$ wählt. Zusammen ergibt dann $B = (v_1, \ldots, v_n)$ wegen Aufgabenteil (d) eine Basis von V. Nach Aufgabenteil (e) gilt

$$\varphi(v_i) = v_i \quad \forall 1 \leq i \leq m \, .$$

Außerdem gilt

$$\varphi(v_i) = 0 \quad \forall m+1 \leq i \leq n \, .$$

D.h. die Matrix der Abbildung φ bezüglich der Basis B ist eine Einheitsmatrix ergänzt um $\dim(\ker \varphi)$ Nullzeilen und Nullspalten.

Aufgabe G3 (Duale Räume)
Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $W \subset V$ ein Untervektorraum. Außerdem sei

$$q : V \to V/W, \qquad v \mapsto v + W$$

die natürliche Abbildung in den Quotientenraum.
Wir betrachten die dualen Räume

$$V^* = \operatorname{Hom}(V, \mathbb{K}) \text{ und } (V/W)^* = \operatorname{Hom}(V/W, \mathbb{K}) \, .$$

(Der duale Raum zu einem Vektorraum ist immer die Menge aller linearen Abbildungen von dem Vektorraum nach $\mathbb{K}$. Diese Menge ist bekanntermaßen wieder ein Vektorraum.)
Gegeben sei weiterhin die Abbildung

$$q^* : (V/W)^* \to V^*, \qquad l \mapsto l \circ q \, .$$

Man beachte: in dieser schreibweise ist l eine Abbildung von V/W nach $\mathbb{K}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung q^* wohldefiniert ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung q^* $\mathbb{K}$-linear ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung q^* injektiv ist.

(d) Aus den bisherigen Aufgabenteilen folgt, dass $\operatorname{im} q^* = q^*((V/W)^*)$ ein Untervektorraum von V^* ist. D.h. der Vektorraum $V^*/q^*((V/W)^*)$ ist definiert.
Im Spezialfall von $V = \mathbb{K}^n$ wurde in einer früheren Aufgabe gezeigt, dass

$$\dim V^* = \dim V$$

gilt. Diese Aussage ist für alle endlichdimensionalen Vektorräume richtig.
Wie groß ist die Dimension von $V^*/q^*((V/W)^*)$?

Lösung:

(a) Wenn $l \in (V/W)^*$ ist, dann ist l eine lineare Abbildung von V/W nach $\mathbb{K}$. Da q eine lineare Abbildung von V nach V/W ist, ist $l \circ q$ eine lineare Abbildung von V nach $\mathbb{K}$, also ein Element von V^*. D.h. die Abbildung q^* ist wohldefiniert.

(b) Für $l_1, l_2 \in (V/W)^*, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} (q^*(\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2))(v) &= ((\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2) \circ q)(v) = (\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2)(q(v)) = \lambda_1(l_1(q(v))) + \lambda_2(l_2(q(v))) \\ &= \lambda_1(l_1 \circ q)(v) + \lambda_2(l_2 \circ q)(v) = (\lambda_1 q^*(l_1) + \lambda_2 q^*(l_2))(v) \\ \Rightarrow q^*(\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2) &= \lambda_1 q^*(l_1) + \lambda_2 q^*(l_2) \, . \end{aligned}$$

D.h. q^* ist $\mathbb{K}$-linear.

w.z.b.w.

(c) Angenommen es gibt $l_1, l_2 \in (V/W)^*$ mit $q^*(l_1) = q^*(l_2)$. Dann gilt auch

$$\begin{aligned} l_1 \circ q &= l_2 \circ q \\ \Rightarrow (l_1 \circ q)(v) &= (l_2 \circ q)(v) \quad \forall v \in V \\ \Rightarrow l_1(q(v)) &= l_2(q(v)) \quad \forall v \in V \\ \Rightarrow l_1(v+W) &= l_2(v+W) \quad \forall v+W \in V/W \\ \Rightarrow l_1 = l_2\,. \end{aligned}$$

D.h. q^* ist injektiv.

w.z.b.w.

(d) Durch Anwenden von bekannten Dimensionsformeln erhält man

$$\begin{aligned} \dim\left(V^*/q^*((V/W)^*)\right) &= \dim V^* - \dim\left(q^*((V/W)^*)\right) = \dim V - \left(\dim(V/W)^* - \dim(\ker q^*)\right) \\ &= \dim V - \dim(V/W) = \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W\,. \end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Basiswechsel)
Wir betrachten die $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ und in diesen die Basen

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ bzw. } \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

und die Standardbasen

$$E_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ bzw. } E_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Eine lineare Abbildung $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ist gegeben durch

$$[\psi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $[\psi]_{E_2}^{E_3}$.

(b) Gegeben sei weiterhin ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ durch $[v]_{E_3} := \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$. Bestimme $[\psi(v)]_{\mathcal{B}}$.

Lösung:

(a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$[\psi]_{E_2}^{E_3} = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{E_2}^{\mathcal{B}} \cdot [\psi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{C}}^{E_3} = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{E_2}^{\mathcal{B}} \cdot [\psi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot \left([\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{E_3}^{\mathcal{C}}\right)^{-1}$$

gilt. Aus der Gestalt der Basen ergibt sich sofort

$$[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{E_2}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{E_3}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse der letzten Matrix bestimmt man mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I+II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{II-I,\, III+1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{I+II,\, III\cdot\frac{1}{2}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \overset{I-III,\, II+III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

D.h. es gilt

$$\left([\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{C}}_{E_3}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der ersten Formel ergibt sich also

$$[\psi]^{E_3}_{E_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \\ -2 & 12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

$$[\psi(v)]_{\mathcal{B}} = [\psi]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{C}} \qquad \text{und} \qquad [v]_{\mathcal{C}} = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{E_3}_{\mathcal{C}}[v]_{E_3} = \left([\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{C}}_{E_3}\right)^{-1}[v]_{E_3}.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} [\psi(v)]_{\mathcal{B}} &= [\psi]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\left([\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{C}}_{E_3}\right)^{-1}[v]_{E_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 21 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 74 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 60 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe H2 (Spur und Determinante)
Gegeben Sei eine beliebige 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit komplexen Einträgen a, b, c und d. Die Determinante einer solchen Matrix ist definiert durch

$$\det(A) := ad - bc\,.$$

Die Spur der Matrix A wird definiert als

$$\mathrm{tr}(A) := a + d\,.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - \lambda\,\mathrm{tr}(A) + \det(A)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt. Dabei bezeichne E wie gewöhnlich die 2×2-Einheitsmatrix.

Lösung: Unter Verwendung der Definitionen ergibt sich

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - \lambda(a+d) + ad - bc \\ &= \lambda^2 - \lambda\,\mathrm{tr}(A) + \det(A)\,. \end{aligned}$$

w.z.b.w.

Aufgabe H3 (Duale Räume)
Wir betrachten wieder die Situation aus der Aufgabe G3
Betrachten Sie die Abbildung

$$f : V^*/q^*((V/W)^*) \to W^*, \qquad l + q^*((V/W)^*) \mapsto l|_W \quad \forall l \in V^*$$

(a) Zeigen Sie, dass f wohldefiniert ist.

(b) Zeigen Sie, dass f $\mathbb{K}$-linear ist.

(c) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

Lösung:

(a)
- Für alle $l \in V^*$ ist $l|_W$ eine lineare Abbildung von W nach $\mathbb{K}$, also ein Element von W^*.
- Seien $l_1, l_2 \in V^*$ mit $l_1 + q^*((V/W)^*) = l_2 + q^*((V/W)^*)$.
  Dann gilt $l_1 - l_2 \in q^*((V/W)^*)$, also gibt es ein $l \in (V/W)^*$ mit

  $$l \circ q = q^*(l) = l_1 - l_2 \,.$$

  D.h. für alle $w \in W$ gilt

  $$(l_1 - l_2)(w) = (l \circ q)(w) = l(q(w)) = l(0) = 0 \,.$$

  Also ist $l_1(w) = l_2(w) \forall w \in W$. Daraus folgt $l_1|_W = l_2|_W$ und damit

  $$f(l_1 + q^*((V/W)^*)) = f(l_2 + q^*((V/W)^*)) \,.$$

Insgesamt bedeutet dies, dass f wohldefiniert ist.

(b) Für je zwei Elemente $l_1 + q^*((V/W)^*), l_2 + q^*((V/W)^*)$ aus $V^*/q^*((V/W)^*)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda_1(l_1 + q^*((V/W)^*)) + \lambda_2(l_2 + q^*((V/W)^*))) &= f((\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2) + q^*((V/W)^*)) = (\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2)|_W \\ &= \lambda_1 l_1|_W + \lambda_2 l_2|_W \\ &= \lambda_1 f(l_1 + q^*((V/W)^*)) + \lambda_2 f(l_2 + q^*((V/W)^*)) \,. \end{aligned}$$

D.h. f ist $\mathbb{K}$-linear.

(c)
- Es sei $\tilde{l} \in W^*$ beliebig. Man kann die lineare Abbildung $\tilde{l} : W \to \mathbb{K}$ fortsetzen zu einer linearen Abbildung $l : V \to \mathbb{K}$ (siehe Aufgabe G1 Tutorium 13). Für diese Abbildung gilt

  $$l \in V^* \text{ und } l|_W = \tilde{l} \,.$$

  Daraus folgt

  $$f\left(l + q^*((V/W)^*)\right) = l|_W = \tilde{l} \,.$$

  Also ist f surjektiv.
- Aus der Aufgabe G3 ist bekannt, dass

  $$\dim\left(V^*/q^*((V/W)^*)\right) = \dim W = \dim W^*$$

  gilt. Daraus folgt

  $$\dim(\ker f) = \dim\left(V^*/q^*((V/W)^*)\right) - \dim(\operatorname{im} f) = \dim W^* - \dim W^* = 0 \,.$$

  Also ist f injektiv.

Insgesamt folgt, dass f bijektiv ist.

w.z.b.w.