Lineare Algebra I
13. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
1. Februar 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Basiswechsel)
$\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ bezeichne wie gewöhnlich die Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich n.
Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad \varphi(p)(x) := xp(x),$$

die Elemente $p_i(x) := x^i$, $q_i(x) := (x+1)^i$ für $i = 0, 1, \ldots, 3$ und die Basen

$$\begin{aligned} B : &= (p_0, p_1, p_2), \\ C : &= (p_0, p_1, p_2, p_3), \\ C' : &= (q_0, q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

von $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ bzw. von $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie $[\varphi]^B_C$ und $[\varphi]^B_{C'}$.

Aufgabe G2 (Projektionen)
Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum.
Wir betrachten in dieser Aufgabe lineare Abbildungen $\varphi : V \to V$ für die $\varphi^2 := \varphi \circ \varphi = \varphi$ gilt.

(a) Betrachten Sie zunächst als Beispiel die zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

gehörige lineare Abbildung

$$\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 .$$

Zeigen Sie, dass die Bedingung $\varphi_A^2 = \varphi_A$ erfüllt ist.

(b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild der Abbildung φ_A aus der letzten Teilaufgabe. Bestimmen Sie außerdem die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_A(x) = x\}$.

(c) Geben Sie eine Basis an, bezüglich der die Abbildung φ_A aus dem Aufgabenteil (a) die Gestalt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat.

(d) Ab jetzt sei V wieder ein beliebiger endlichdimensionaler Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\varphi^2 = \varphi$.
Zeigen Sie, dass $V = \ker \varphi \oplus \operatorname{im} \varphi$ gilt.

(e) Zeigen Sie

$$\{x \in V \mid \varphi(x) = x\} = \operatorname{im} \varphi .$$

(f) Gibt es immer eine Basis von V bezüglich der die Matrix von φ eine Einheitsmatrix eventuell ergänzt um Nullzeilen und/oder Nullspalten ist? Wenn ja, wie kann man eine solche Basis finden und wieviele Nullzeilen bzw. Nullspalten kommen vor?

Aufgabe G3 (Duale Räume)
Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $W \subset V$ ein Untervektorraum. Außerdem sei

$$q : V \to V/W, \qquad v \mapsto v + W$$

die natürliche Abbildung in den Quotientenraum.
Wir betrachten die dualen Räume

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}) \text{ und } (V/W)^* = \mathrm{Hom}(V/W, \mathbb{K})\,.$$

(Der duale Raum zu einem Vektorraum ist immer die Menge aller linearen Abbildungen von dem Vektorraum nach $\mathbb{K}$. Diese Menge ist bekanntermaßen wieder ein Vektorraum.)
Gegeben sei weiterhin die Abbildung

$$q^* : (V/W)^* \to V^*, \qquad l \mapsto l \circ q\,.$$

Man beachte: in dieser schreibweise ist l eine Abbildung von V/W nach $\mathbb{K}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung q^* wohldefiniert ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung q^* $\mathbb{K}$-linear ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung q^* injektiv ist.

(d) Aus den bisherigen Aufgabenteilen folgt, dass im $q^* = q^*((V/W)^*)$ ein Untervektorraum von V^* ist. D.h. der Vektorraum $V^*/q^*((V/W)^*)$ ist definiert.
Im Spezialfall von $V = \mathbb{K}^n$ wurde in einer früheren Aufgabe gezeigt, dass

$$\dim V^* = \dim V$$

gilt. Diese Aussage ist für alle endlichdimensionalen Vektorräume richtig.
Wie groß ist die Dimension von $V^*/q^*((V/W)^*)$?

Hausübung

Aufgabe H1 (Basiswechsel)
Wir betrachten die $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ und in diesen die Basen

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ bzw. } \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

und die Standardbasen

$$E_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ bzw. } E_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Eine lineare Abbildung $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ist gegeben durch

$$[\psi]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $[\psi]^{E_3}_{E_2}$.

(b) Gegeben sei weiterhin ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ durch $[v]_{E_3} := \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$. Bestimme $[\psi(v)]_{\mathcal{B}}$.

Aufgabe H2 (Spur und Determinante)
Gegeben Sei eine beliebige 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit komplexen Einträgen a, b, c und d. Die Determinante einer solchen Matrix ist definiert durch

$$\det(A) := ad - bc\,.$$

Die Spur der Matrix A wird definiert als

$$\operatorname{tr}(A) := a + d\,.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(A) + \det(A)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt. Dabei bezeichne E wie gewöhnlich die 2×2-Einheitsmatrix.

Aufgabe H3 (Duale Räume)
Wir betrachten wieder die Situation aus der Aufgabe G3
Betrachten Sie die Abbildung

$$f : V^*/q^*((V/W)^*) \to W^*, \qquad l + q^*((V/W)^*) \mapsto l|_W \quad \forall l \in V^*$$

(a) Zeigen Sie, dass f wohldefiniert ist.
(b) Zeigen Sie, dass f $\mathbb{K}$-linear ist.
(c) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.