Lineare Algebra I
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
26. Januar 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1
Betrachten Sie die folgenden Abbildungen $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Welche davon sind linear? Bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörige Matrix $[\phi]$ (bezüglich den Standardbasen).

(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x + 3y \\ -2z \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} yx \\ zx \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |x| \\ |y| \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x-1)^2 + 3z - (x+1)^2 \\ \sqrt{4(z+1)^2 + (2z-2)^2 - 8} \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) Ja. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(b) Nein $\phi(1,1,1) = (1,1)$ und $\phi(2,2,2) = (4,4) \neq 2 \cdot (1,1)$.

(c) Nein $\phi(0,0,0) = (1,0) \neq (0,0)$.

(d) Ja $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(e) Nein. $\phi(1,0,0) = (1,0) = \phi(-1,0,0) \neq -(1,0)$.

(f) Ja $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Aufgabe G2
Sei A eine $m \times n$-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, A ist genau dann invertierbar, wenn die lineare Abbildung $\phi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $\phi_A(x) = Ax$ bijektiv ist.

Lösung:

- Angenommen, dass A invertierbar ist. $\phi_{A^{-1}}(\phi_A(x)) = A^{-1}(Ax) = Ex = x$. Eben so $\phi_A(\phi_{A^{-1}}(x)) = AA^{-1}x = Ex = x$. Daraus folgt, dass ϕ_A bijektiv ist, und $(\phi_A)^{-1} = \phi_{A^{-1}}$.
- Angenommen, dass ϕ_A invertierbar ist. Es gilt, dass $(\phi_A)^{-1}$ auch linear ist. (Es wurde schon gezeigt.) Daraus folgt, dass es eine Matrix B gibt, mit $(\phi_A)^{-1} = \phi_B$. Für alle x gilt dann $\phi_B(\phi_A(x)) = x$. Somit $BAx = x$. Man verwendet diese Gleichung mit $x = (1, 0, \dots, 0)$, mit $x = (0, 1, 0, \dots, 0)$ u.s.w. Daraus leitet man her, dass die Spalten der Matrix BA genau die Spalten von E sind. Somit $BA = E$. Daraus folgt, dass A invertierbar ist und $A^{-1} = B$ gilt.

Aufgabe G3
Wir betrachten $Hom(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ im Spezialfall $m = 1$. Wir definieren den Dualraum von $\mathbb{K}^n$, als die Menge der linearen Abbildungen $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ durch $(\mathbb{K}^n)^* = Hom(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$

(a) Zeigen Sie, dass $dim(\mathbb{K}^n)^* = n$.

(b) Zeigen Sie: zu jeder Basis (v_i) von $\mathbb{K}^n$ gibt es (eindeutig bestimmt) Elemente $w_1, \dots, w_n \in (\mathbb{K}^n)^*$ mit $w_i(v_j) = \delta_{ij}$, wobei $\delta_{ii} = 1$ und $i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0$.

(c) Zeigen Sie: für jede Basis (v_i) von $\mathbb{K}^n$ sind die Elemente $w_1, \dots, w_n$ wie in (b) linear unabhängig und damit eine Basis von $(\mathbb{K}^n)^*$. Bemerkung: $w_1, \dots, w_n$ heißt die zu $v_1 \dots, v_n$ duale Basis von $(\mathbb{K}^n)^*$.

Lösung:

(a) Allgemein $dim Hom(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = mn$. In diesem Spezialfall gilt es $dim(\mathbb{K}^n)^* = n$.

(b) für alle i, es gibt genau eine Abbildung, damit $w_i(v_j) = \delta_{ij}$ (Satz 5.1.9).

(c) Sei $\sum_{1 \le i \le n} \alpha_i w_i = 0$ (die Null-Abbildung). Für alle j gilt dann $\sum_{1 \le i \le n} \alpha_i w_i(v_j) = \sum_{1 \le i \le n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j = 0$. Daraus folgt, dass die w_i unabhängig sind. Außerdem gibt es n Vektoren w_j in einem n-dimensional Vektorraum, deshalb sind die w_j eine Basis von $(\mathbb{K}^n)^*$.

Aufgabe G4
Die Komplexe Zahle $x + yi$ wird durch (x, y) dargestellt. Sind die drei Vektoren $((1,0),(0,0))$, $((0,1),(0,0))$ und $((0,0),(1,0))$ linear unabhängig?

Lösung: Als Vektoren von $\mathbb{C}^2$, sind sie linear abhängig, weil $(0,1) \cdot ((1,0),(0,0)) = ((0,1),(0,0))$. Als Vektoren von $\mathbb{R}^4$, sind sie linear unabhängig.

Hausübung

Aufgabe H1
Beweise, dass eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gerade einer Multiplikation mit einer komplexen Zahl entspricht.
Bestimme die Matrixdarstellung der Multiplikation mit einer Zahl $c = a + ib$.

Lösung: Sei $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Sei $c := A1$. Dann gilt $Ax = A(x1) = xA1 = cx$.

$$(a + ib)(1 + 0i) = a + ib \quad \text{und} \quad (a + ib)(0 + i) = -b + ia.$$

Also: Die Matrixdarstellung von $B : z \mapsto (a + ib)z$ ist $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Aufgabe H2
Gegeben sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{und } \mathrm{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{und } \varphi(\mathrm{v}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, daß die Vektoren v_1, v_2 und v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Berechnen Sie $\varphi(v_4)$.

(c) Geben Sie einen Vektor v_5 mit $\varphi(v_5) = w$ an.

Lösung:

(a) Die Bedingung $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ führt auf die Gleichungen

$$\alpha + \beta = 0, \quad 2\alpha - \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

die nur für $\alpha = \beta = \gamma = 0$ lösbar sind. Damit sind die drei Vektoren linear unabhängig.

(b) Zuerst wird v_4 als Linearkombination $v_4 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ der drei Basisvektoren aus (a) dargestellt,

$$\alpha + \beta = 4, \quad 2\alpha - \beta = 2, \quad \gamma = 2.$$

Mit $\gamma = 2$, $\alpha = 2$ und $\beta = 2$ folgt

$$\begin{aligned} \varphi(v_4) &= \varphi(2v_1 + 2v_2 + 2v_3) = 2\Big(\varphi(v_1) + \varphi(v_2) + \varphi(v_3)\Big) \\ &= 2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Nun muß w als Linearkombination $w = \alpha\varphi(v_1) + \beta\varphi(v_2) + \gamma\varphi(v_3)$ der drei Bildvektoren dargestellt werden,

$$\begin{array}{lcccccccc} (1) & & & \beta & + & 2\gamma & = & 2, \\ (2) & \alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & 3, \\ (3) & & & 3\beta & + & 7\gamma & = & 5, \\ (4) = (3) - 3(1) & & & & & \gamma & = & -1. \end{array}$$

Mit $\gamma = -1$, $\beta = 4$ und $\alpha = -6$ folgt

$$w = -6\varphi(v_1) + 4\varphi(v_2) - \varphi(v_3) = \varphi(-6v_1 + 4v_2 - v_3) = \varphi(v_5),$$

also

$$v_5 = -6v_1 + 4v_2 - v_3 = -6\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -16 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H3

Sei A die reelle 2×2–Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $B_\lambda = A - \lambda E_2$. Berechne Werte λ_1 und $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, so dass $\det(B_{\lambda_i}) = 0$. (Wobei die Determinante einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist $\det(A) = ad - bc$.)

(b) Finde Vektoren v_1 und v_2, die $V_1 := \ker B_{\lambda_1}$ bzw. $V_2 := \ker B_{\lambda_2}$ erzeugen. Zeige, dass V die direkte Summe von V_1 und V_2 ist.

(c) Warum bilden die Vektoren v_1, v_2 eine Basis $\mathscr{B}'$?

(d) Die Matrix A beschreibt eine lineare Abbildung bezüglich der Standardbasis. Berechne die Matrix dieser Abbildung bezüglich der neuen Basis $\mathscr{B}'$.

Lösung:

(a) Es ist

$$\det B = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 6 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)(5-\lambda) + 12 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2),$$

also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.

(b) Um die Kerne zu bestimmen, erhält man mit Gauss–Jordan-Elimination

$$B_1 = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } B_2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher kann man $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ wählen. v_1 und v_2 sind linear unabhängig, daher ist $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ und $V_1 + V_2 = V$. Also ist V die direkte Summe von V_1 und V_2.

(c) Die Vektoren v_1 und v_2 sind linear unabhängig und bilden daher eine Basis.

(d) Die Übergangsmatrix von der Standardbasis zur Basis B' ist

$$S := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe von

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

berechnet man die gesuchte Matrix A' als

$$A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$