Lineare Algebra I
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
26. Januar 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1
Betrachten Sie die folgenden Abbildungen $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Welche davon sind linear? Bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörige Matrix $[\phi]$ (bezüglich den Standardbasen).

(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x+3y \\ -2z \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} yx \\ zx \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |x| \\ |y| \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x-1)^2+3z-(x+1)^2 \\ \sqrt{4(z+1)^2+(2z-2)^2-8} \end{pmatrix}$

Aufgabe G2
Sei A eine $m \times n$-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, A ist genau dann invertierbar, wenn die lineare Abbildung $\phi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $\phi_A(x) = Ax$ bijektiv ist.

Aufgabe G3
Wir betrachten $Hom(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ im Spezialfall $m = 1$. Wir definieren den Dualraum von $\mathbb{K}^n$, als die Menge der linearen Abbildungen $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ durch $(\mathbb{K}^n)^* = Hom(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$

(a) Zeigen Sie, dass $dim(\mathbb{K}^n)^* = n$.

(b) Zeigen Sie: zu jeder Basis (v_i) von $\mathbb{K}^n$ gibt es (eindeutig bestimmt) Elemente $w_1, \dots, w_n \in (\mathbb{K}^n)^*$ mit $w_i(v_j) = \delta_{ij}$, wobei $\delta_{ii} = 1$ und $i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0$.

(c) Zeigen Sie: für jede Basis (v_i) von $\mathbb{K}^n$ sind die Elemente $w_1, \dots, w_n$ wie in (b) linear unabhängig und damit eine Basis von $(\mathbb{K}^n)^*$. Bemerkung: $w_1, \dots, w_n$ heißt die zu $v_1 \dots, v_n$ duale Basis von $(\mathbb{K}^n)^*$.

Aufgabe G4
Die Komplexe Zahle $x + yi$ wird durch (x, y) dargestellt. Sind die drei Vektoren $((1,0),(0,0))$, $((0,1),(0,0))$ und $((0,0),(1,0))$ linear unabhängig?

Hausübung

Aufgabe H1

Beweise, dass eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gerade einer Multiplikation mit einer komplexen Zahl entspricht. Bestimme die Matrixdarstellung der Multiplikation mit einer Zahl $c = a + ib$.

Aufgabe H2

Gegeben sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathrm{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi(\mathrm{v}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, daß die Vektoren v_1, v_2 und v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Berechnen Sie $\varphi(v_4)$.

(c) Geben Sie einen Vektor v_5 mit $\varphi(v_5) = w$ an.

Aufgabe H3

Sei A die reelle 2×2–Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $B_\lambda = A - \lambda E_2$. Berechne Werte λ_1 und $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, so dass $\det(B_{\lambda_i}) = 0$. (Wobei die Determinante einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist $\det(A) = ad - bc$.)

(b) Finde Vektoren v_1 und v_2, die $V_1 := \ker B_{\lambda_1}$ bzw. $V_2 := \ker B_{\lambda_2}$ erzeugen. Zeige, dass V die direkte Summe von V_1 und V_2 ist.

(c) Warum bilden die Vektoren v_1, v_2 eine Basis $\mathscr{B}'$?

(d) Die Matrix A beschreibt eine lineare Abbildung bezüglich der Standardbasis. Berechne die Matrix dieser Abbildung bezüglich der neuen Basis $\mathscr{B}'$.