Lineare Algebra I
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
21. Januar 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1
Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ist A invertierbar?

Lösung: Wir transformieren die Matrix in Zeilenstufenform:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \overset{I \leftrightarrow II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \overset{II-2I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III-3I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 5 & 1 \\ 0 & -6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \overset{III-II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Zeilenstufenform von A hat drei nicht verschwindende Zeilen, daher ist der Rang von A gleich 3.
Da A keine quadratische Matrix ist, ist sie auch nicht invertierbar.

Aufgabe G2
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Zeigen Sie, dass $rank(A) \leq \min\{n, m\}$ gilt.

Lösung: Der Rang von A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen oder Spalten. Insbesondere ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spalten. Daraus folgt sofort, daß der Rang von A weder größer als die Anzahl der Zeilen noch der Spalten sein kann. Daher gilt $rank(A) \leq \min\{n, m\}$.

Aufgabe G3
Sei $A = (a_{i,j})_{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n}$ eine Matrix aus $\mathscr{M}_{m,n}$. Die transponierte Matrix von A ist $A^T = (a_{j,i})_{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n}$.

(a) Zeigen Sie, dass $rank(A) = rank(A^T)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $(AB)^T = B^T A^T$ gilt.

Lösung:

(a) Wegen der Definition der Transponiert, ist der Zeilrang von A der Spaltenrang von A^T. Es folgt das $rank(A) = rank(A^T)$, weil für jede Matrix Zeilenrang gleich Spaltenrang ist.

(b) Schreiben Sie einfach explizit die zwei Produkte.

Aufgabe G4

(a) Seien U, V, W drei endlichdimensional Vektorräume und seien ϕ, ψ lineare Abbildungen mit $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\phi} W$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{rank}(\phi \circ \psi) = \mathrm{rank}(\psi) - \dim(Ker\phi \cap \mathrm{im}\,\psi).$$

(b) Zeigen Sie, dass $rank(A) = rank(A^TA)$ für alle reellen Matrizen A gilt.

Lösung:

(a) Verwenden Sie die Dimension Formel für $\phi\ |_{\psi(U)}\ \psi(U) \to W$. Daraus folgt $\dim(\psi(U)) = \dim(Ker\phi\ |_{\psi(U)}) + \dim(\mathrm{im}\,\phi_{|\psi(U)}) \iff \dim(\mathrm{im}\,\psi) = \dim(Ker\phi_{\psi(U)}) + \dim(\mathrm{im}\,\phi\circ\psi) \iff \mathrm{rank}(\psi) = \dim(Ker\phi \cap \mathrm{im}\,\psi) + \dim(\mathrm{im}\,\phi \circ \psi) \iff \mathrm{rank}(\phi\circ\psi) = \mathrm{rank}(\psi) - \dim(Ker\phi \cap \mathrm{im}\,\psi)$.

(b) Wegen der Formel der vorigen Teilaufgabe, braucht man nur zeigen, dass $dim(Ker(A^T) \cap \mathrm{im}(A)) = 0$. Sei $y \in Ker(A^T) \cap im(A)$, d.h. $A^Ty = 0$ und es gibt x, mit $y = Ax$. Daraus folgt $A^TAx = 0$, insbesondere $x^TA^TAx = (Ax)^TAx = 0$. Somit $Ax = y = 0$.

Hausübung

Aufgabe H1

Seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Zeigen Sie, dass $\mathrm{rank}A = 1 \iff A = x \cdot y^T$ wobei $x \in \mathbb{K}^m\backslash\{0\}$ und $y \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}$ sind zwei Vektoren.

Lösung:

Angenommen $\mathrm{rank}A = 1$. Es gilt $\dim(a^1, \cdots, a^n) = 1$ und dann gilt es $\lambda_i a^1 = a^i$ für ein passendes $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Daraus folgt $A = a^1 \cdot (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

Umgekehrt sei $A = x \cdot y^T$ mit $x \in \mathbb{K}^m\backslash\{0\}$ und $y \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}$. Es gilt $a^i = y_i x$ und es folgt, dass $\dim(a^1, \cdots, a^n) = 1$ und $\mathrm{rank}A = 1$ gelten.

Aufgabe H2

Seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und $B \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass

(a) $\mathrm{rank}(AB) \leq \min\{\mathrm{rank}A, \mathrm{rank}B\}$.

(b) $\mathrm{rank}(AB) \geq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B - n$.

Lösung:

(a) Wegen Aufgage G4 auf diesem Blatt gilt $\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(B)$. Wegen Aufgabe G3 auf diesem Blatt gilt $\mathrm{rank}(AB)^T = \mathrm{rank}(AB)$ und $(AB)^T = B^TA^T$. Es folgt, dass wegen Aufgabe G4 auf diesem Blatt $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(AB)^T \leq \mathrm{rank}(A^T) = \mathrm{rank}(A)$ gilt. Also folgt $\mathrm{rank}(AB) \leq \min\{\mathrm{rank}A, \mathrm{rank}B\}$.

(b) $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(B) - \dim(Ker(A)) \cap Im(B))$ und $\dim(Ker(A) \cap Im(B)) + \mathrm{rank}(A) \leq \dim(Ker(A)) + \mathrm{rank}(A) = n$. Daraus folgt $\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(B) + \mathrm{rank}(A) - n$.

Aufgabe H3

(a) Geben Sie Matrizen $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ an mit $rank(A) = rank(B) = 2$ und $rank(AB) = 1$

(b) Gibt es $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ mit $rank(A) = rank(B) = 3$ und $rank(AB) = 1$?

Lösung:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Es ist nicht möglich wegen Teilaufgabe H2 (b), d.h. $\mathrm{rank}(AB) \geq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B - n$.