Lineare Algebra I
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
21. Januar 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1
Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ist A invertierbar?

Aufgabe G2
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Zeigen Sie, dass $rank(A) \leq \min\{n, m\}$ gilt.

Aufgabe G3
Sei $A = (a_{i,j})_{0\leq i\leq m, 0\leq j\leq n}$ eine Matrix aus $\mathcal{M}_{m,n}$. Die transponierte Matrix von A ist $A^T = (a_{j,i})_{0\leq i\leq m, 0\leq j\leq n}$.

(a) Zeigen Sie, dass $rank(A) = rank(A^T)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $(AB)^T = B^T A^T$ gilt.

Aufgabe G4

(a) Seien U, V, W drei endlichdimensional Vektorräume und seien ϕ, ψ lineare Abbildungen mit $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\phi} W$. Zeigen Sie, dass

$$\text{rank}(\phi \circ \psi) = \text{rank}(\psi) - \dim(Ker\,\phi \cap \text{im}\,\psi).$$

(b) Zeigen Sie, dass $rank(A) = rank(A^T A)$ für alle reellen Matrizen A gilt.

Hausübung

Aufgabe H1
Seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
Zeigen Sie, dass $\text{rank} A = 1 \iff A = x \cdot y^T$ wobei $x \in \mathbb{K}^m \backslash\{0\}$ und $y \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$ sind zwei Vektoren.

Aufgabe H2
Seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und $B \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass

(a) $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank} A, \text{rank} B\}$.

(b) $\text{rank}(AB) \geq \text{rank} A + \text{rank} B - n$.

Aufgabe H3

(a) Geben Sie Matrizen $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ an mit $rank(A) = rank(B) = 2$ und $rank(AB) = 1$

(b) Gibt es $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ mit $rank(A) = rank(B) = 3$ und $rank(AB) = 1$?