Lineare Algebra I
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
11. Januar 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1
Sei V ein Vektorraum endlicher Dimension und U ein Untervektorraum. Folgen Sie aus der Aufgabe G4 des Tutoriums 10, dass $dim(U) + dim(V/U) = dim(V)$ gilt.

Lösung: Mithilfe der Notationen, $dim(U) = m$, $dim(V/U) = n$ und $dim(V) = n + m$.

Aufgabe G2

(a) Seien $V = U_1 \oplus U_2$ und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Seien $\phi_1 : U_1 \to W$ und $\phi_2 : U_2 \to W$ zwei lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ gibt, sodass $\phi\mid_{U_1} = \phi_1$ und $\phi\mid_{U_2} = \phi_2$.

(b) Sei V ein endlicher $\mathbb{K}$-Vektorraum und U_1, U_2 zwei Untervektorräume von V. Angenommen, für je zwei lineare Abbildungen $\phi_1 : U_1 \to W$ und $\phi_2 : U_2 \to W$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$, sodass $\phi\mid_{U_1} = \phi_1$ und $\phi\mid_{U_2} = \phi_2$. Zeigen Sie, dass $V = U_1 \oplus U_2$ gilt.

Lösung:

(a)
- Existenz: Für alle x in V, sei $\phi(x) := \phi_1(x_1) + \phi_2(x_2)$, mit $x = x_1 + x_2$ und $x_1 \in U_1$ und $x_1 \in U_2$. ϕ ist linear, wie jetzt gezeigt wird. Seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x = x_1 + x_2$ und $y = y_1 + y_2$, mit $x_1, y_1 \in U_1$ und $x_2, y_2 \in U_2$. Es gilt $x_1 + \lambda y_1 \in U_1$ und $x_2 + \lambda y_2 \in U_2$, weil U_1 und U_2 Untervektorräume von V sind. $\phi(x + \lambda y) = \phi_1(x_1 + \lambda y_1) + \phi_2(x_2 + \lambda y_2) = \phi_1(x_1) + \phi_2(x_2) + \lambda\phi_1(y_1) + \lambda\phi_2(y_2) = \phi(x) + \lambda\phi(y)$.
- Eindeutigkeit: Seien $\phi, \phi' : V \to W$ zwei lineare Abbildungen, sodass $\phi\mid_{U_1} = \phi'\mid_{U_1} = \phi_1$ und $\phi\mid_{U_2} = \phi'\mid_{U_2} = \phi_2$ gilt. Für alle $x = x_1 + x_2 \in U_1 \oplus U_2$, $\phi(x) = \phi(x_1) + \phi(x_2) = \phi_1(x_1) + \phi_2(x_2) = \phi_1'(x_1) + \phi_2'(x_2) = \phi'(x)$.

(b) Wir zeigen zuerst, dass $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gilt und dann, dass $U_1 + U_2 = V$ gilt.
- Seien $\phi_1 = 0$ und $\phi_2 = id$ und ϕ linear, sodass $\phi\mid_{U_1} = \phi_1$ und $\phi\mid_{U_2} = \phi_2$ gilt. Sei $v \in U_1 \cap U_2$. $\phi(v) = \phi_1(v) = 0$ und $\phi(v) = \phi_2(v) = v$. Daraus folgt $v = 0$, d.h. $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.
- Sei W ein Untervektorraum mit $V = (U_1 + U_2) \oplus W$. (Solcher Untervektorraum existiert.) Sei $\phi = 0$ und ϕ' linear, sodass $\phi'\mid_{U_1+U_2} = 0$ und $\phi'\mid_W = id$. (Solche Abbildung existiert wegen der vorige Teilaufgabe.) Wegen der Annahme gilt $\phi = \phi'$, d.h. $W = \{0\}$ und $U_1 + U_2 = V$.

Aufgabe G3
Wir betrachten im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathscr{P}_3(\mathbb{Q})$ der Polynome vom Grad ≤ 3 die Teilmengen $U := \{p \mid p(-1) = 0\}$ und $V := \{p \mid p(2) = 0\}$.

(a) Zeige, dass U und V lineare Untervektorräume des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathscr{P}_3(\mathbb{Q})$ sind.

(b) Bestimme Basen für U und V.

(c) Bestimme die Dimensionen von U, V, $U \cap V$ und $U + V$.

Lösung:

(a) Es seien $p, q \in U$ und $\lambda \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$(p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0 + 0 = 0 \qquad \text{sowie} \qquad (\lambda p)(-1) = \lambda p(-1) = \lambda 0 = 0$$

und somit $p + q \in U$ und $\lambda p \in U$. Damit ist U als Untervektorraum von $\mathscr{P}_3(\mathbb{Q})$ nachgewiesen. Völlig analog verläuft der Beweis für V.

(b) Es gilt

$$U = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0\}.$$

Lösen wir die einschränkende Gleichung nach a_0 auf, so erhalten wir, dass U aus allen Polynomen der Form

$$(a_1 - a_2 + a_3) + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_1(x+1) + a_2(x^2-1) + a_3(x^3+1)$$

mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}$ besteht. Wie man leicht überprüft, sind die Polyome $x+1$, x^2-1 und x^3+1 über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig und bilden somit eine Basis von U. Analog erhalten wir, dass V aus allen Polynomen der Form

$$-(2a_1 + 4a_2 + 8a_3) + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_1(x-2) + a_2(x^2-4) + a_3(x^3-8)$$

mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}$ besteht. Wie man leicht nachprüft, sind die Polyome $x-2$, x^2-4 und x^3-8 über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig und bilden somit eine Basis von V.

(c) Aus b) folgt $\dim U = \dim V = 3$ und aus

$$1 = \frac{1}{3}(x+1) - \frac{1}{3}(x-2)$$

erhalten wir $1 \in U + V$. Für $p := a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathscr{P}_3(\mathbb{Q})$ folgt daraus

$$p = (a_0 - a_1 + a_2 - a_3)1 + a_1(x+1) + a_2(x^2-1) + a_3(x^3+1) \in U + V$$

somit $U + V = \mathscr{P}_3(\mathbb{Q})$. Es gilt also $\dim(U+V) = \dim \mathscr{P}_3(\mathbb{Q}) = 4$ und (mit dem Dimensionssatz) folgt daraus

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 3 + 3 - 4 = 2.$$

Aufgabe G4
Zeigen Sie, dass es keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad \ker f = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Angenommen, es gibt eine solche lineare Abbildung f. Dann wäre $\dim \operatorname{Im} f = 2$, da die beiden Vektoren im Spann linear unabhängig sind und $\dim \ker f = 1$. Nach dem Dimensionssatz muss gelten: $4 = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = 2 + 1 = 3$, was den gewünschten Widerspruch liefert.

Aufgabe G5
Sei $V = C([0,1], \mathbb{C})$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{C}$.

(a) Für eine Teilmenge $M \subseteq [0,1]$, sei $U := \{f \in V : f(x) = 0 \text{ für alle } x \in M\}$. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.

(b) Betrachten Sie $U_0 = \{f \in V : f(0) = 0\}$. Beweisen Sie, dass $V/U_0 \cong \mathbb{C}$ gilt.

Lösung:

(a) Klar.

(b) Wegen $V/U_0 = \{f + U_0 : f \in V\}$, sei $\phi : V/U_0 \to \mathbb{C}$ mit $\phi(f + U_0) := f(0)$. (ϕ ist wohldefiniert, weil $g \in f + U_0 Rightarrow\, g(0) = f(0)$ gilt.)

ϕ ist eine lineare Abbildung, wir zeigen jetzt, dass es bijektiv ist.

Sei $\phi(f + U_0) = f(0) = g(0) = \phi(g + U_0)$. Daraus folgt $(f-g)(0) = 0$ und $f - g \in U_0 \rightsquigarrow f + U_0 = g + U_0$, somit ist ϕ injektiv. ϕ ist auch surjektiv, weil $g(0) = \phi(g + U_0)$ für alle $g \in V$ gilt.

Hausübung

Aufgabe H1

Wir betrachten im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathscr{P}_3(\mathbb{Q})$ der Polynome vom Grad ≤ 3 mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ den Untervektorraum $V := \{p \mid p(0) = 0\}$. Des Weiteren betrachten wir in $\mathscr{P}_3(\mathbb{Q})$ die Polynome

$$p_0 := x(x-1)(x-2), \qquad p_1 := (x+1)x(x-1), \qquad p_2 := (x+2)(x+1)x.$$

(a) Stellen Sie das Polynom $6x$ als Linearkombination von p_0, p_1 und p_2 dar.

(b) Beweisen Sie, dass die Polynome p_0, p_1, p_2 eine Basis von V bilden.

Lösung:

(a) Um x als Linearkombination von p_0, p_1, p_2 darzustellen, setzen wir an

$$\lambda_0 x(x-1)(x-2) + \lambda_1(x+1)x(x-1) + \lambda_2(x+2)(x+1)x = 6x$$

mit $\lambda_k \in \mathbb{Q}$. Setzen wir in diese Gleichung nacheinander $x = 1, 2, 3$ ein, so erhalten wir die Gleichungen

$$6\lambda_2 = 6, \quad 6\lambda_1 + 24\lambda_2 = 12 \quad \text{and} \quad 6\lambda_0 + 24\lambda_1 + 60\lambda_2 = 18,$$

aus denen sich die Werte $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_0 = 1$ ergeben.

(b) Um zu zeigen, dass die Polynome p_0, p_1, p_2 eine Basis von V bilden, überlegen wir uns zuerst ihre lineare Unabhängigkeit. Dazu setzen wir

$$\lambda_0 x(x-1)(x-2) + \lambda_1(x+1)x(x-1) + \lambda_2(x+2)(x+1)x = 0$$

Wie in der Lösung zu Teil a) setzen wir in diese Gleichung nacheinander $x = 1, 2, 3$ ein und erhalten so die Gleichungen

$$6\lambda_2 = 0, \quad 6\lambda_1 + 24\lambda_2 = 0 \quad \text{and} \quad 6\lambda_0 + 24\lambda_1 + 60\lambda_2 = 0,$$

aus denen sich $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_0 = 0$ und damit die lineare Unabhänigkeit von p_0, p_1 und p_2 ergibt.

Wegen $p_0(0) = p_1(0) = p_2(0) = 0$ gilt $p_0, p_1, p_2 \in V$. Als Nächstes bemerken wir, dass $V \neq \mathscr{P}_3(\mathbb{Q})$ wegen $1 \notin V$ gilt. Daraus folgt $\dim V < \dim \mathscr{P}_3(\mathbb{Q}) = 4$ (nach Proposition 4.5.9) und p_0, p_1, p_2 bilden somit ein maximales linear unabhängiges System von Vektoren in V. Auf Grund von Satz 4.5.12 bilden sie damit eine Basis von V.

Aufgabe H2

Sei W ein untervektorraumraumm des endlichdimensional Vektorraum V. Angenommen, dass $B = (w_1, \cdots, w_m)$ eine Basis für W ist und $(v_1 + W, \cdots, v_k + W)$ eine Basis des Quotientenraum V/W bildet. Zeigen Sie, dass $C = (w_1, \cdots, w_m, v_1, \cdots, v_k)$ eine Basis für V ist, ohne die Formel $\dim(V) = \dim(W) + \dim(V/W)$ anzuwenden.

Lösung: Sei $u \in V$. Weil $(v_1 + W, \cdots, v_k + W)$ eine Basis von V/W ist, gilt es $u + W = a_1(v_1 + W) + \cdots + a_k(v_k + W)$. Daraus folgt, dass $u = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k + w$ für ein $w \in W$. Weil B eine Basis von W ist, folgt $u = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k + b_1 w_1 + \cdots + b_m w_m$. Somit erzeugt C V.

Jetzt wird gezeigt, dass C unabhängig ist. Angenommen $c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k + d_1 w_1 + \cdots d_m w_m = 0$, dann $c_1(v_1 + W) + \cdots + c_k v_k + W = 0$. Weil $v_1 + W, \cdots, v_k + W$ unabhängig sind die Koeffizienten c_i null. Daraus folgt, dass $d_1 w_1 + \cdots d_m w_m = 0$. Weil B eine Basis von W sind die Koeffizienten d_i null. Somit ist C eine Basis von V.

Aufgabe H3

Seien $U \subseteq V$ und $X \subseteq W$ vier $\mathbb{K}$-Vektorräume. Seien $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und die Abbildung $F : V/U \to W/X$ definiert durch $v + U \mapsto f(v) + X$. Zeigen Sie, dass F wohldefiniert ist, genau dann, wenn $f(U) \subseteq X$ gilt.

Lösung:

- Angenommen, dass F wohldefiniert ist. Sei $u \in U$. Wegen $v + U = v + u + U$ folgt $f(v) + X = f(v+u) + X$, weil F wohldefiniert ist. Somit $f(v) - f(v+u) = f(u) \in X$.
- Angenommen, dass $f(U) \subseteq X$. Sei $y \in v + U$. Es gilt $y = v + u$ mit $u \in U$. Daraus folgt $f(y) = f(v+u) = f(v) + f(u) \in f(v) + X$. Somit $f(y) + X = f(v) + X$, d.h. F ist wohldefiniert.