Lineare Algebra I
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
11. Januar 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1
Sei V ein Vektorraum endlicher Dimension und U ein Untervektorraum. Folgen Sie aus der Aufgabe G4 des Tutoriums 10, dass $dim(U) + dim(V/U) = dim(V)$ gilt.

Aufgabe G2

(a) Seien $V = U_1 \oplus U_2$ und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Seien $\phi_1 : U_1 \to W$ und $\phi_2 : U_2 \to W$ zwei lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ gibt, sodass $\phi\,|_{U_1} = \phi_1$ und $\phi\,|_{U_2} = \phi_2$.

(b) Sei V ein endlicher $\mathbb{K}$-Vektorraum und U_1, U_2 zwei Untervektorräume von V. Angenommen, für je zwei lineare Abbildungen $\phi_1 : U_1 \to W$ und $\phi_2 : U_2 \to W$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$, sodass $\phi\,|_{U_1} = \phi_1$ und $\phi\,|_{U_2} = \phi_2$. Zeigen Sie, dass $V = U_1 \oplus U_2$ gilt.

Aufgabe G3
Wir betrachten im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathscr{P}_3(\mathbb{Q})$ der Polynome vom Grad ≤ 3 die Teilmengen $U := \{p \,|\, p(-1) = 0\}$ und $V := \{p \,|\, p(2) = 0\}$.

(a) Zeige, dass U und V lineare Untervektorräume des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathscr{P}_3(\mathbb{Q})$ sind.

(b) Bestimme Basen für U und V.

(c) Bestimme die Dimensionen von U, V, $U \cap V$ und $U + V$.

Aufgabe G4
Zeigen Sie, dass es keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad \ker f = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G5
Sei $V = C([0,1], \mathbb{C})$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{C}$.

(a) Für eine Teilmenge $M \subseteq [0,1]$, sei $U := \{f \in V : f(x) = 0$ für alle $x \in M\}$. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.

(b) Betrachten Sie $U_0 = \{f \in V : f(0) = 0\}$. Beweisen Sie, dass $V/U_0 \cong \mathbb{C}$ gilt.

Hausübung

Aufgabe H1
Wir betrachten im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathscr{P}_3(\mathbb{Q})$ der Polynome vom Grad ≤ 3 mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ den Untervektorraum $V := \{p \,|\, p(0) = 0\}$. Des Weiteren betrachten wir in $\mathscr{P}_3(\mathbb{Q})$ die Polynome

$$p_0 := x(x-1)(x-2), \qquad p_1 := (x+1)x(x-1), \qquad p_2 := (x+2)(x+1)x.$$

(a) Stellen Sie das Polynom $6x$ als Linearkombination von p_0, p_1 und p_2 dar.

(b) Beweisen Sie, dass die Polynome p_0, p_1, p_2 eine Basis von V bilden.

Aufgabe H2

Sei W ein untervektorraumraumm des endlichdimensional Vektorraum V. Angenommen, dass $B = (w_1, \cdots, w_m)$ eine Basis für W ist und $(v_1 + W, \cdots, v_k + W)$ eine Basis des Quotientenraum V/W bildet. Zeigen Sie, dass $C = (w_1, \cdots, w_m, v_1, \cdots, v_k)$ eine Basis für V ist, ohne die Formel $\dim(V) = \dim(W) + \dim(V/W)$ anzuwenden.

Aufgabe H3

Seien $U \subseteq V$ und $X \subseteq W$ vier $\mathbb{K}$-Vektorräume. Seien $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und die Abbildung $F : V/U \to W/X$ definiert durch $v + U \mapsto f(v) + X$. Zeigen Sie, dass F wohldefiniert ist, genau dann, wenn $f(U) \subseteq X$ gilt.