Lineare Algebra I
9. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
10. Januar 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Vektorräume über endlichen Körpern)
Es sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit q Elementen und V ein n-dimensionaler $\mathbb{F}$-Vektorraum.

(a) Wieviele Elemente hat V?

(b) Wieviele geordnete Basen hat V?

(c) Wieviele Basen hat V?

(d) Berechnen Sie die Anzahl der Basen des $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$-Vektorraums $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$.

Lösung:

(a) Wir wählen eine geordnete Basis von V. Diese hat n Elemente.
Jeder Vektor von V hat nun genau eine Darstellung als Linearkombination von Basisvektoren. Für die Koeffizienten gibt es pro Basisvektor q Möglichkeiten.
Also hat V genau q^n Elemente.

(b) Wir können eine geordnete Basis von V konstruieren, indem wir mit einem beliebigen, vom Nullvektor verschiedenen Vektor starten und dann sukzessiv weitere Vektoren dazunehmen, welche noch nicht zum Spann der bislang gewählten Vektoren gehören. Wenn wir auf diese Art n Vektoren ausgewählt haben, so haben wir eine geordnete Basis von V . Diese soeben beschriebene Konstruktion lässt sich auf

$$(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdot\ldots\cdot(q^n-q^{n-1})$$

verschiedene Arten durchführen, was somit der Anzahl der verschiedenen geordneten Basen entspricht.

(c) Zu jeder Basis gehören $n!$ geordneten Basen. Also gibt es

$$\frac{(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdot\ldots\cdot(q^n-q^{n-1})}{n!}$$

verschiedenen Basen.

(d) Die Anzahl der Basen des $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$-Vektorraums $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ ist

$$\frac{(3^4-1)(3^4-3)(3^4-3^2)(3^4-3^3)}{4!}=\frac{80\cdot 78\cdot 72\cdot 54}{24}=1010880\,.$$

Aufgabe G2 (Dimension und direkte Summe)
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v\in V$.

(a) Zeigen Sie, dass $\{v\}$ genau dann linear unabhängig ist, wenn $v\neq 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass ein Untervektorraum U von V genau dann die Dimension Null hat, wenn $U=\{0\}$ gilt.

(c) Es seien U_1,U_2 Untervektorräume von V. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen.
   (i) $U_1+U_2=U_1\oplus U_2$

(ii) $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$

Lösung:

(a) Wenn $v = 0$ ist gilt $\lambda v = 0$ für alle Elemente $\lambda \in V$, insbesondere auch für $\lambda = 1 \neq 0$. D.h. $\{v\}$ ist linear abhängig.
Wenn $v \neq 0$ ist, so folgt aus $\lambda v = 0$ wegen (V11) (siehe Vorlesung) $\lambda = 0$, d.h. $\{v\}$ ist linear unabhängig.

w.z.b.w.

(b) Nach Definition ist $\emptyset$ linear unabhängig, denn da kein Element von $\emptyset$ existiert gilt für alle $b \in \emptyset : b \notin$ spann$(\emptyset - \{b\})$.
Außerdem ist $\mathrm{span}(\emptyset) = \bigcap \{U \mid$ U ist Untervektorraum von $V\}$. Da $\{0\}$ ein Untervektorraum von V ist gilt $\mathrm{span}(\emptyset) \subseteq \{0\}$, da 0 in jedem Unterraum enthalten ist gilt $\{0\} \subseteq \mathrm{span}(\emptyset)$. Insgesamt folgt spann$(\emptyset) = \{0\}$.
$\emptyset$ ist also eine Basis von $\{0\}$. D.h. es gilt $\dim \{0\} = 0$.
Andererseits: Sei U ein Untervektorraum der Dimension Null.
Angenommen es ist $U \neq \{0\}$. Da U Untervektorraum ist enthält er immer die Null, d.h. die Annahme bedeutet es existiert ein $v \in U$ mit $v \neq 0$. Wegen (a) ist dann $\{v\}$ linear unabhängig. Wegen dem Basisergänzungssatz gibt es also eine Basis von U, die v enthält, d.h. $\dim U \geq 1 > 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.
D.h. aus $\dim U = 0$ folgt $U = \{0\}$.

w.z.b.w.

(c) Nach Satz 4.3.14. aus der Vorlesung gilt (i) genau dann, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ ist. Wegen (b) ist das genau dann der Fall, wenn $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$ ist.
Außerdem gilt die bekannte Dimensionsformel

$$\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2)\,.$$

Insgesamt gilt also

$$\text{(i)} \iff \dim(U_1 \cap U_2) = 0 \iff \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2) = 0 \iff \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 \iff \text{(ii)}\,.$$

w.z.b.w.

Aufgabe G3 (Der Folgenraum)
Es sei $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der reellen Zahlenfolgen. Diese bildet mit den Operationen

$$\begin{aligned} + : V \times V \to V, &\qquad \big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) \mapsto (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und} \\ \cdot : \mathbb{R} \times V \to V, &\qquad \big(\lambda, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) \mapsto (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Ist die Teilmenge $U_1 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V,$ höchstens endlich viele der a_n sind ungleich Null $\}$ ein Untervektorraum von V? Zeigen Sie ihre Aussage.

(b) Ist die Teilmenge $U_2 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V,$ höchstens endlich viele der a_n sind gleich Null $\}$ ein Untervektorraum von V? Zeigen Sie ihre Aussage.

(c) Besitzen U_1 bzw. U_2 eine Basis. Wenn ja bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von U_1 bzw. U_2.

(d) Was ist die Dimension von V?

(e) Bildet die in (c) bestimmte Basis von U_1 auch eine Basis von V?

Lösung:

(a) Offensichtlich ist die Nullfolge ein Element von U_1.
Addiert man zwei Zahlenfolge aus U_1, so hat die Summe dieser beiden auch nur endlich viele Folgenglieder ungleich Null, ist also wieder in U_1.
Multipliziert man eine Zahlenfolge (a_n) aus U_1 mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $\lambda a_n = 0$ genau dann wenn $a_n = 0$ ist. D.h. die Zahlenfolge $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat ebenfalls höchstens endlich viele von Null verschiedene Folgenglieder, liegt also in U_1.
Zusammen heißt das: U_1 ist ein Untervektorraum von V.

w.z.b.w.

(b) U_2 ist kein Untervektorraum von V. Denn es sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1, b_n = -1\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ Elemente aus U_2. Aber $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Nullfolge und kein Element von U_2.

(c) U_2 ist kein Vektorraum, hat also auch keine Basis.
Wie man leicht sieht ist die Menge $M = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, a_n = 1$ für genau ein $n \in \mathbb{N}, a_n = 0$ sonst$\}$ eine Basis von U_1.

(d) Es ist $\dim V = \infty$, denn die Menge $M \subset V$ aus dem letzten Aufgabenteil hat unendlich viele Elemente und ist linear unabhängig. Dies ist nach Korrolar 4.6.2 für endlichdimensionale Vektorräume nicht möglich.

(e) Die in (c) bestimmte Basis von U_1 bildet keine Basis von V, da z.B. die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ keine endliche Linearkombination von Elementen aus der dortigen Basis ist.

Aufgabe G4 (Vektorräume über endlichen Körpern)
Es sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit q Elementen, V ein n-dimensionaler $\mathbb{F}$-Vektorraum und $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ fest gewählt.

(a) Wieviele k-dimensionale Untervektorräume hat V?

(b) Berechne die Anzahl der 2-dimensionalen Untervektorräume des $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$-Vektorraums $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$.

(c) (*) Sei $U \subseteq V$ ein k-dimensionaler Untervektorraum. Für $x \in V$ ist $x + U$ ein k-dimensionaler affiner Unterraum. Für wieviele verschieden Vektoren x' ist $x + U = x' + U$?

(d) (*) Wieviele k-dimensionale affine Unterräume hat V?

(e) (*) Berechne die Anzahl der 1-dimensionalen affinen Unterräume des $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$-Vektorraums $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$.

Lösung:

(a) Analog zu Aufgabe G1 ergibt sich für die Anzahl aller möglichen Basen eines k-dimensionalen Untervektorraums von V

$$(q^n - 1)(q^n - q) \cdot \ldots \cdot (q^n - q^{k-1})\,.$$

Um die Anzahl der k-dimensionalen Untervektorräume zu errechnen muss man diese Anzahl der Basen durch die Anzahl $(q^k - 1)(q^k - q) \cdot \ldots \cdot (q^k - q^{k-1})$ aller Basen eines k-dimensionalen Untervektorraums dividieren.
Es ergibt sich für die Anzahl der k-dimensionalen Untervektorräume von V

$$\begin{aligned}\frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdot \ldots \cdot (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q) \cdot \ldots \cdot (q^k - q^{k-1})} &= \frac{(q^n - 1)q(q^{n-1} - 1) \cdot \ldots \cdot q^{k-1}(q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)q(q^{k-1} - 1) \cdot \ldots \cdot q^{k-1}(q - 1)} \\ &= \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (q - 1)}\,.\end{aligned}$$

(b) Mit den Werten $n = 4, q = 3$ und $k = 2$ ergibt sich aus der letzten Teilaufgabe, dass die gesuchte Anzahl

$$\frac{(3^4 - 1)(3^3 - 1)}{(3^2 - 1)(3 - 1)} = \frac{80 \cdot 26}{8 \cdot 2} = 10 \cdot 13 = 130$$

ist.

(c) Es gilt $x + U = x' + U$ genau dann, wenn $x - x' \in U$. Also genau dann wenn x' die Gestalt $x' = x + u$ mit $u \in U$ hat. Die Anzahl der x' mit dieser Eigenschaft entspricht der Anzahl von Elementen in U, die nach G1 gleich

$$q^k$$

ist.

(d) Bekannt ist, dass zwei affine Unterräume $x + U$ und $x' + W$ genau dann gleich sind, wenn $U = W$ und $x - x' \in U$ gilt. D.h. die Anzahl der k-dimensionalen affinen Unterräume von V ist

$$\begin{aligned}&\frac{\text{Anzahl der } k\text{- dimensionalen Untervektorräume} \cdot \text{ Anzahl der Elemente von } V}{\text{Anzahl der Elemente von } U} \\ &= \frac{q^n}{q^k} \cdot \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (q - 1)} = q^{n-k} \cdot \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (q - 1)}\end{aligned}$$

(e) Mit den Werten $n = 4, q = 3$ und $k = 1$ ergibt sich aus der letzten Teilaufgabe, dass die gesuchte Anzahl

$$3^3 \cdot \frac{3^4 - 1}{3 - 1} = 27 \cdot \frac{80}{2} = 1080$$

ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (Lineare Abbildungen)
Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $(v_1,\dots,v_n)$ bzw. $(w_1,\dots,w_n)$ Basen von V bzw. W. Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ gibt mit

$$\varphi(v_1) = w_1, \dots, \varphi(v_n) = w_n\,.$$

Zeigen Sie weiterhin, dass diese Abbildung φ ein Vektorraumisomorphismus ist.

Lösung: Da $(v_1,\dots,v_n)$ eine Basis von V ist, lässt sich jedes Element von V auf eindeutige Weise als Linearkombination von $v_1,\dots,v_n$ schreiben. Man kann eine Abbildung φ also definieren durch

$$\varphi : V \to W, \qquad \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \mapsto \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n\,.$$

Diese Abbildung erfüllt offensichtlich $\varphi(v_1) = w_1, \dots, \varphi(v_n) = w_n$. Außerdem ist sie linear, denn für $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda'_1, \dots, \lambda'_n \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned}&\varphi\left(\mu_1(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) + \mu_2(\lambda'_1 v_1 + \ldots + \lambda'_n v_n)\right) = \varphi\left((\mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda'_1)v_1 + \ldots + (\mu_1\lambda_n + \mu_2\lambda'_n)v_n\right)\\ &= (\mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda'_1)w_1 + \ldots + (\mu_1\lambda_n + \mu_2\lambda'_n)w_n = \mu_1(\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n) + \mu_2(\lambda'_1 w_1 + \ldots + \lambda'_n w_n)\\ &= \mu_1\varphi(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) + \mu_2\varphi(\lambda'_1 v_1 + \ldots + \lambda'_n v_n)\,.\end{aligned}$$

Es gibt also eine Abbildung mit den in der Aufgabe geforderten Eigenschaften.
Angenommen es gibt noch eine zweite lineare Abbildung $\chi : V \to W$ mit $\chi(v_1) = w_1, \dots, \chi(v_n) = w_n$. Dann gilt für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\chi(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = \lambda_1\chi(v_1) + \ldots + \lambda_n\chi(v_n) = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n = \varphi(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)\,.$$

Da sich jedes Element von V als Linearkombination von $v_1,\dots,v_n$ darstellen lässt folgt daraus

$$\chi = \varphi\,.$$

Es ist also gezeigt, dass es genau eine Abbildung φ mit den in der Aufgabe geforderten Eigenschaften ist.
Es bleibt zu zeigen, dass φ ein Vektorraumisomorphismus ist. Da φ linear ist, reicht es zu zeigen, dass φ bijektiv ist. Dies folgt sofort aus der Tatsache, dass $(w_1,\dots,w_n)$ eine Basis von W ist und somit jedes Element aus W auf eindeutige Weise als Linearkombination $\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n$ mit $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ dargestellt werden kann.

w.z.b.w.

Aufgabe H2 (Basis und direkte Summe)
Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U_1 \subseteq V$ ein Untervektorraum.
Zeigen Sie: Es gibt einen Untervektorraum $U_2 \subseteq V$ mit $V = U_1 \oplus U_2$.

Lösung: Es sei $v_1,\dots v_n$ eine Basis von U_1. Dann sind diese Vektoren insbesondere auch in V linear unabhängig und wegen dem Basisergänzungssatz gibt es Elemente $w_1,\dots,w_m \in V$, so dass $v_1,\dots,v_n,w_1,\dots,w_m$ eine Basis von V bildet.
Setze $U_2 := \operatorname{span}(w_1,\dots,w_n)$. Dies ist bekanntermaßen ein Untervektorraum von V.
Jedes Element aus V lässt sich auf eindeutige Weise in der Gestalt

$$\underbrace{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n}_{\in U_1} + \underbrace{\mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m}_{\in U_2}$$

mit $\lambda_1 \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$ schreiben. Da $w_1,\dots,w_m$ linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von U_2.
D.h. jedes Element aus U_1 hat genau eine Darstellung als Linearkombination der Elemente $v_1,\dots,v_n$ und jedes Element aus U_2 hat genau eine Darstellung als Linearkombination der Elemente $w_1,\dots,w_m$.
Zusammen ergibt sich, dass jedes Element aus V eine eindeutige Darstellung als Summe von einem Element aus U_1 und einem Element aus U_2 hat.
D.h. es gilt $V = U_1 \oplus U_2$.

w.z.b.w.

Aufgabe H3 (Isomorphismen und Basen)
Es seien V und W zwei isomorphe $\mathbb{K}$-Vektorräume. D.h. es existiert ein Vektorraumisomorphismus $\varphi : V \to W$. Weiterhin sei $B \subset V$ eine Basis von V.
Zeigen Sie, dass dann $\varphi(B) := \{\varphi(v) \mid v \in B\}$ eine Basis von W ist.

Lösung: Sei $w \in W$ beliebig. Da φ bijektiv ist existiert ein $v \in V$ mit $\varphi(v) = w$. Da B eine Basis von V ist gibt es Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, v_1, \ldots, v_n \in B$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. Zusammen ergibt sich

$$w = \varphi(v) = \varphi(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \ldots + \lambda_n \varphi(v_n)\,,$$

wobei $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ Elemente aus $\varphi(B)$ sind.
D.h. $\varphi(B)$ erzeugt V.
Seien nun $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ beliebige Elemente von $\varphi(B)$.
Außerdem seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $\lambda_1 \varphi(v_1) + \ldots + \lambda_n \varphi(v_n) = 0$. Dann folgt

$$0 = \lambda_1 \varphi(v_1) + \ldots + \lambda_n \varphi(v_n) = \varphi(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)\,.$$

Da φ injektiv ist und $\varphi(0) = 0$ wegen der Linearität gilt, ergibt sich $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Weil $v_1, \ldots, v_n \in B$ und B linear unabhängig ist folgt daraus

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0\,.$$

D.h. $\varphi(B)$ ist linear unabhängig.
Insgesamt ergibt sich, dass $\varphi(B)$ eine Basis von W ist.

w.z.b.w.