Lineare Algebra I
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
10. Januar 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Vektorräume über endlichen Körpern)
Es sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit q Elementen und V ein n-dimensionaler $\mathbb{F}$-Vektorraum.

(a) Wieviele Elemente hat V?

(b) Wieviele geordnete Basen hat V?

(c) Wieviele Basen hat V?

(d) Berechnen Sie die Anzahl der Basen des $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$-Vektorraums $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$.

Aufgabe G2 (Dimension und direkte Summe)
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass $\{v\}$ genau dann linear unabhängig ist, wenn $v \neq 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass ein Untervektorraum U von V genau dann die Dimension Null hat, wenn $U = \{0\}$ gilt.

(c) Es seien U_1, U_2 Untervektorräume von V. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen.
   (i) $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$
   (ii) $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$

Aufgabe G3 (Der Folgenraum)
Es sei $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, a_n \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der reellen Zahlenfolgen. Diese bildet mit den Operationen

$$\begin{aligned} + : V \times V \to V, &\qquad \big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) \mapsto (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und} \\ \cdot : \mathbb{R} \times V \to V, &\qquad \big(\lambda, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) \mapsto (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Ist die Teilmenge $U_1 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V,$ höchstens endlich viele der a_n sind ungleich Null $\}$ ein Untervektorraum von V? Zeigen Sie ihre Aussage.

(b) Ist die Teilmenge $U_2 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V,$ höchstens endlich viele der a_n sind gleich Null $\}$ ein Untervektorraum von V? Zeigen Sie ihre Aussage.

(c) Besitzen U_1 bzw. U_2 eine Basis. Wenn ja bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von U_1 bzw. U_2.

(d) Was ist die Dimension von V?

(e) Bildet die in (c) bestimmte Basis von U_1 auch eine Basis von V?

Aufgabe G4 (Vektorräume über endlichen Körpern)
Es sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit q Elementen, V ein n-dimensionaler $\mathbb{F}$-Vektorraum und $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ fest gewählt.

(a) Wieviele k-dimensionale Untervektorräume hat V?

(b) Berechne die Anzahl der 2-dimensionalen Untervektorräume des $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$-Vektorraums $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$.

(c) (*) Sei $U \subseteq V$ ein k-dimensionaler Untervektorraum. Für $x \in V$ ist $x + U$ ein k-dimensionaler affiner Unterraum. Für wieviele verschieden Vektoren x' ist $x + U = x' + U$?

(d) (*) Wieviele k-dimensionale affine Unterräume hat V?

(e) (*) Berechne die Anzahl der 1-dimensionalen affinen Unterräume des $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$-Vektorraums $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Lineare Abbildungen)
Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $(v_1, \dots, v_n)$ bzw. $(w_1, \dots, w_n)$ Basen von V bzw. W. Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ gibt mit

$$\varphi(v_1) = w_1, \dots, \varphi(v_n) = w_n \, .$$

Zeigen Sie weiterhin, dass diese Abbildung φ ein Vektorraumisomorphismus ist.

Aufgabe H2 (Basis und direkte Summe)
Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U_1 \subseteq V$ ein Untervektorraum.
Zeigen Sie: Es gibt einen Untervektorraum $U_2 \subseteq V$ mit $V = U_1 \oplus U_2$.

Aufgabe H3 (Isomorphismen und Basen)
Es seien V und W zwei isomorphe $\mathbb{K}$-Vektorräume. D.h. es existiert ein Vektorraumisomorphismus $\varphi : V \to W$. Weiterhin sei $B \subset V$ eine Basis von V.
Zeigen Sie, dass dann $\varphi(B) := \{\varphi(v) \,|\, v \in B\}$ eine Basis von W ist.