Lineare Algebra I
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
6. Dezember 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lineare Unabhängigkeit)
Betrachten Sie den aus der Vorlesung bekannten Vektorraum $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(a) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2 in V linear unabhängig?

$$f_1(x) := e^x, \quad f_2(x) := x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(b) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2, f_3 in V linear unabhängig?

$$f_1(x) := \sin^2 x, \quad f_2(x) := \cos^2 x, \quad f_3(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(c) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2, f_3 in V linear unabhängig?

$$f_1(x) := 1, \quad f_2(x) := x, \quad f_3(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie jeweils ihre Behauptungen.

Lösung:

(a) Aus $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\lambda_1 e^x + \lambda_2 x = 0$. Setzt man hier für x die speziellen Werte 0 und 1 ein, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 &= 0 \\ \lambda_1 \cdot e + \lambda_2 \cdot 1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich $\lambda_1 = 0$. Durch Einsetzen in die zweite Gleichung erhält man auch $\lambda_2 = 0$. Also sind f_1 und f_2 linear unabhängig.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt bekanntlich $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Es ist aldo

$$f_1 + f_2 - f_3 = 0\,.$$

D.h. f_1, f_2 und f_3 sind linear abhängig.

(c) Aus $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2 = 0$. Setzt man hier für x die speziellen Werte $0, 1$ und -1 ein, so ergibt sich das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccc} \lambda_1 & & & = & 0 \\ \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{ccccc} \lambda_1 & & & = & 0 \\ \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

Es gilt also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
D.h. f_1, f_2 und f_3 sind linear unabhängig.

Aufgabe G2 (Lineare Unabhängigkeit)

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{4} \\ \overline{1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{3} \\ \overline{1} \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{2} \\ \overline{0} \end{pmatrix}$$

im Vektorraum $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ über dem Körper $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ linear abhängig sind.

Lösung:

(a) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$.

$$\Longrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} & & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 4\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 5\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

Daraus ergibt sich nacheinander $\lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$.
D.h. die drei Vektoren aus der Aufgabe sind linear unabhängig.

w.z.b.w.

(b) Man geht analog zum vorherigen Aufgabenteil vor, allerdings wird jetzt in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ gerechnet.
Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ mit $0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$.

$$\Longrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} & & \overline{2}\,\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \overline{4}\,\lambda_1 & + & \overline{3}\,\lambda_2 & + & \overline{2}\,\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & \overline{2}\,\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \overline{4}\,\lambda_2 & + & \overline{2}\,\lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & \overline{2}\,\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Eine nicht-triviale Lösung dieses Gleichungssystems ist $\lambda_2 = \overline{1}$, $\lambda_1 = \overline{4}$ und $\lambda_3 = \overline{3}$.
D.h. die drei Vektoren aus der Aufgabe sind linear abhängig.

w.z.b.w.

Aufgabe G3 (Direkte Produkte und direkte Summe)

(a) Seien $V_1, V_2, \ldots, V_n$ Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, für die $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$ gilt.
Zeigen Sie, dass es in dieser Situation einen Vektorraumisomorphismus zwischen $V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ und V gibt.

(b) Seien $V_1, V_2, \ldots, V_n$ $\mathbb{K}$-Vektorräume und $V = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$.
Weiter sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $U_i := \{(\underbrace{0, \ldots 0}_{i-1-mal}, v, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i-mal}) \mid v \in V_i\}$.
Zeigen Sie
- U_i ist ein Untervektorraum von V.
- Es gibt einen Vektorraumisomorphismus zwischen U_i und V_i
- Es gilt $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_3$.

Lösung:

(a) Man betrachte die Abbildung

$$\varphi : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \to V, \quad (v_1, v_2, \ldots, v_n) \mapsto v_1 + v_2 + \ldots + v_n \,.$$

Wegen $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$ kann man jedes Element $v \in V$ eindeutig als Summe $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ mit $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \ldots, v_n \in V_n$ schreiben.
D.h. φ ist bijektiv.

Für $v = (v_1, v_2, \dots, v_n), v'(v_1', v_2', \dots, v_n') \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda v + \mu v') &= \varphi(\lambda v_1 + \mu v_1', \lambda v_2 + \mu v_2', \dots, \lambda v_n + \mu v_n') = \lambda v_1 + \mu v_1' + \lambda v_2 + \mu v_2' + \dots + \lambda v_n + \mu v_n' \\ &= \lambda(v_1 + v_2 + \dots + v_n) + \mu(v_1' + v_2' + \dots + v_n') = \lambda\varphi(v) + \mu\varphi(v') \,.\end{aligned}$$

Also ist φ linear.
Da die Umkehrabbildung jeder bijektiven linearen Abbildung wieder linear ist, ist auch φ^{-1} linear.
Also ist φ ein Vektorraumisomorphismus zwischen $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ und V.

w.z.b.w.

(b)
- Man zeigt die drei Unterraumbedingungen für U_i:
  (U1) Da V_i ein Vektorraum ist, enthält er ein Nullelement $0 \in V_i$. In V gilt dann

  $$0 = (0, \dots, 0) \in \{(\underbrace{0, \dots 0}_{i-1-mal}, v, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i-mal}) \mid v \in V_i\} = U_i \,.$$

  (U2) Seien $u, u' \in U_i$, dann existieren Elemente $v, v' \in V_i$ mit

  $$u = (\underbrace{0, \dots 0}_{i-1-mal}, v, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i-mal}), \quad u' = (\underbrace{0, \dots 0}_{i-1-mal}, v', \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i-mal}) \,.$$

  Da V_i ein Vektorraum ist gilt $v + v' \in V$ und damit folgt

  $$u + u' = (\underbrace{0, \dots 0}_{i-1-mal}, v + v', \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i-mal}) \in U_i.$$

  (U3) Seien $u \in U_i$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann existiert ein Element $v \in V_i$ mit $u = (\underbrace{0, \dots 0}_{i-1-mal}, v, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i-mal})$. Da V_i ein Vektorraum ist gilt $\lambda v \in V$ und damit folgt

  $$\lambda u = (\underbrace{0, \dots 0}_{i-1-mal}, \lambda v, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i-mal}) \in U_i \,.$$

  Insgesamt ergibt sich, dass U_i ein Untervektorraum von V ist.
- Man betrachtet die Abbildung

  $$f : U_i \to V_i, \quad (\underbrace{0, \dots 0}_{i-1-mal}, v_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i-mal}) \mapsto v_i \,.$$

  f ist offensichtlich bijektiv und linear, also ein Vektorraumisomorphismus.
- Jedes Element $v \in V$ kann man wegen der Definition des direkten Produkts auf genau eine Weise in der Gestalt

  $$v = (v_1, v_2, \dots v_n) = (v_1, 0, \dots 0) + (0, v_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, v_n)$$

  mit $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \dots, v_n \in V_n$ schreiben. Die rechte Seite der Gleichung hat die Form einer allgemeinen Summe $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ mit $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \dots, u_n \in U_n$. Jedes Element aus V lässt sich also auf eindeutige Weise als so eine Summe schreiben.
  D.h. es gilt $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$.

w.z.b.w.

Aufgabe G4 (Lineare Abbildungen und lineare Unabhängigkeit)
Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und $v_1, \dots, v_n \in V$. Zeigen Sie: Sind die Bilder $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ linear unabhängig, so sind auch $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

Lösung: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$. Dann gilt wegen der Linearität von φ

$$0 = \varphi(0) = \varphi(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \dots + \lambda_n \varphi(v_n) \,.$$

Wenn $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ linear unabhängig sind, folgt hieraus $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
Damit sind auch $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

w.z.b.w.

Hausübung

Aufgabe H1 (Komplexe Zahlen)

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Überlegen Sie sich hierzu zuerst die Abbildungsvorschriften für die Addition und die skalare Multiplikation in einer geeigneten Schreibweise.

(b) Sei $z = a + ib$ eine komplexe Zahl. Zeigen Sie, dass die komplexe Multiplikation mit z

$$\varphi_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z' \mapsto z \cdot z'$$

eine lineare Abbildung ist.

Lösung:

(a) Die komplexen Zahlen sind $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit den Operationen aus Tutorium 6 Aufgabe G1. Die Addition und die Skalare Multiplikation haben dann die Gestalt

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \left(\lambda, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Da dies dieselben Operationen sind wie im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ übertragen sich alle Eigenschaften sofort auf $\mathbb{C}$.

D.h. auch $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt wegen der Distribitivität, Assoziativität und Kommutativität der Operationen in den komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$ ist ein Körper):

$$\varphi_z(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = z(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = z\lambda_1 z_1 + z\lambda_2 z_2 = \lambda_1 z z_1 + \lambda_2 z z_2 = \lambda_1 \varphi_z(z_1) + \lambda_2 \varphi_z(z_2)\,.$$

D.h. φ_z ist linear.

w.z.b.w.

Aufgabe H2 (Basis)

Bestimmen Sie für den von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$ aufgespannten linearen Teilraum eine Basis.

Lösung: Wir betrachten die Matrix, welche die gegebenen Vektoren als Zeilenvektoren enthält und bringen diese mit Hilfe des Gaußalgorithmus auf Stufenform. Die Zeilen der Entstehenden Matrix, welche nicht Null sind, sind dann laut Vorlesung die gesuchten Basisvektoren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -4 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & -5 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 41 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix}$ bilden somit eine Basis des betrachteten Untervektorraums von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe H3 (Lineare Unabhängigkeit)

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $u, v, w \in \mathbb{Q}^n$ linear unabhängige Vektoren. Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen.

(a) $u + v,\ u + w,\ v + w$ sind linear unabhängig.

(b) $u-v+w$, $u+v-w$, $5u+v+w$ sind linear unabhängig.

Lösung:

(a) Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Q}$ mit $\lambda_1(u+v)+\lambda_2(u+w)+\lambda_3(v+w)=0$. Dann folgt $(\lambda_1+\lambda_2)u+(\lambda_1+\lambda_3)v+(\lambda_2+\lambda_3)w=0$. Da u, v, w linear unabhängig sind ergibt sich hieraus folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

Aus dem letzten Gleichungssystem erhält man nacheinander $\lambda_3=0, \lambda_2=0$ und $\lambda_1=0$.
Insgesamt folgt, dass die Vektoren $u+v$, $u+w$, $v+w$ linear unabhängig sind.

w.z.b.w.

(b) Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Q}$ mit $\lambda_1(u-v+w)+\lambda_2(u+v-w)+\lambda_3(5u+v+w)=0$.
Dann folgt $(\lambda_1+\lambda_2+5\lambda_3)u+(-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)v+(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)w=0$.
Da u, v, w linear unabhängig sind ergibt sich hieraus folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 5\lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 5\lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\lambda_2 & + & 6\lambda_3 & = & 0 \\ & - & 2\lambda_2 & - & 4\lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 5\lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\lambda_2 & + & 6\lambda_3 & = & 0 \\ & & & - & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

Aus dem letzten Gleichungssystem erhält man nacheinander $\lambda_3=0, \lambda_2=0$ und $\lambda_1=0$.
Insgesamt folgt, dass die Vektoren $u-v+w$, $u+v-w$, $5u+v+w$ linear unabhängig sind.

w.z.b.w.