Lineare Algebra I
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
6. Dezember 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lineare Unabhängigkeit)
Betrachten Sie den aus der Vorlesung bekannten Vektorraum $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(a) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2 in V linear unabhängig?
$$f_1(x) := e^x, \quad f_2(x) := x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(b) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2, f_3 in V linear unabhängig?
$$f_1(x) := \sin^2 x, \quad f_2(x) := \cos^2 x, \quad f_3(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(c) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2, f_3 in V linear unabhängig?
$$f_1(x) := 1, \quad f_2(x) := x, \quad f_3(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie jeweils ihre Behauptungen.

Aufgabe G2 (Lineare Unabhängigkeit)

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren
$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren
$$v_1 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{4} \\ \overline{1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{3} \\ \overline{1} \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{2} \\ \overline{0} \end{pmatrix}$$
im Vektorraum $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ über dem Körper $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ linear abhängig sind.

Aufgabe G3 (Direkte Produkte und direkte Summe)

(a) Seien $V_1, V_2, \ldots, V_n$ Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, für die $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$ gilt.
Zeigen Sie, dass es in dieser Situation einen Vektorraumisomorphismus zwischen $V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ und V gibt.

(b) Seien $V_1, V_2, \ldots, V_n$ $\mathbb{K}$-Vektorräume und $V = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$.
Weiter sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $U_i := \{(\underbrace{0, \ldots 0}_{i-1-mal}, v, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i-mal}) \mid v \in V_i\}$.

Zeigen Sie
- U_i ist ein Untervektorraum von V.
- Es gibt einen Vektorraumisomorphismus zwischen U_i und V_i
- Es gilt $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_3$.

Aufgabe G4 (Lineare Abbildungen und lineare Unabhängigkeit)
Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeigen Sie: Sind die Bilder $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ linear unabhängig, so sind auch $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

Hausübung

Aufgabe H1 (Komplexe Zahlen)

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Überlegen Sie sich hierzu zuerst die Abbildungsvorschriften für die Addition und die skalare Multiplikation in einer geeigneten Schreibweise.

(b) Sei $z = a + ib$ eine komplexe Zahl. Zeigen Sie, dass die komplexe Multiplikation mit z

$$\varphi_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z' \mapsto z \cdot z'$$

eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe H2 (Basis)

Bestimmen Sie für den von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$ aufgespannten linearen Teilraum eine Basis.

Aufgabe H3 (Lineare Unabhängigkeit)

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $u, v, w \in \mathbb{Q}^n$ linear unabhängige Vektoren. Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen.

(a) $u + v$, $u + w$, $v + w$ sind linear unabhängig.

(b) $u - v + w$, $u + v - w$, $5u + v + w$ sind linear unabhängig.