Lineare Algebra I
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
30. November 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Affine Unterräume)
Es sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Ein Affiner Unterraum A von V enthält die Null genau dann, wenn A bereits ein Untervektorraum von V ist.

(b) Für einen Untervektorraum U von V und Elemente $a, b \in V$ gilt

$$a + U = b + U \Leftrightarrow a - b \in U \Leftrightarrow b - a \in U \,.$$

(c) Für einen Untervektorraum U von V und Elemente $a, b \in V$ gilt

$$b \in a + U \Leftrightarrow a + U = b + U \,.$$

Lösung:

(a)
- Angenommen A ist ein Untervektorraum von V. Dann ist wegen der Unterraumbedingung (U1) aus der Vorlesung Null ein Element von A.
- Angenommen Null ist ein Element von A.
  Die Definition affiner Unterräume besagt gerade, dass ein $a \in V$ und ein Untervektorraum U von V existiert mit $A = a + U = \{a + u \,|\, u \in U\}$.
  Aus $0 \in A$ folgt die Existenz eines Elements $u_1 \in U$ mit

  $$0 = a + u_1 \Rightarrow a = -u_1 = (-1) \cdot u_1 \in U \text{ (da U ein Untervektorraum ist).}$$

  Es gilt also $A = -u_1 + U$.
  Da U Untervektorraum ist gilt für alle $u \in U$ auch $-u_1 + u \in U$. D.h. es ist

  $$A = -u_1 + U \subseteq U \,.$$

  Andererseits kann man jedes Element $u \in U$ in der Form $u = -u_1 + (u_1 + u)$ mit $u_1 + u \in U$ schreiben. D.h. es ist

  $$U \subseteq -u_1 + U = A \,.$$

  Insgesamt folgt $A = U$. Da U ein Untervektorraum von V ist gilt dies auch für A.

w.z.b.w.

(b)
- Angenommen es ist $a + U = b + U$. Da U ein Untervektorraum ist gilt $0 \in U$ und damit ist $a + 0 \in b + U$.
  Daraus folgt die Existenz eines Elements $u \in U$ mit $a = b + u$. D.h. es ist

  $$a - b = u \in U \,.$$

- Angenommen es gilt $a-b \in U$. D.h. $\exists u \in U$ mit $u = a-b$.
  Insbesondere lässt sich jedes Element von $a+U$ in der Gestalt $a+u_1 = b+(u+u_1) \in b+U$ mit einem Element $u_1 \in U$ schreiben. D.h. es ist
  $$a+U \subseteq b+U\ .$$
  Andererseits lässt sch jedes Element von $b+U$ in der Gestalt $b+u_2 = a+(u_2-u) \in a+U$ mit einem Element $u_2 \in U$ schreiben. D.h. es ist
  $$b+U \subseteq a+U\ .$$
  Insgesamt folgt $a+U = b+U$.
- Da U ein Untervektorraum ist folgt aus $a-b \in U$ auch $b-a = (-1)(a-b) \in U$.
  Analog folgt aus $b-a \in U$ auch $a-b = (-1)(b-a) \in U$.

w.z.b.w.

(c) Diese Aussage folgt mit Hilfe der vorigen und der Definition affiner Unterräume sofort:
$$b \in a+U \Leftrightarrow \exists u \in U : b = a+u \Leftrightarrow \exists u \in U : b-a = u \Leftrightarrow b-a \in U \Leftrightarrow a+U = b+U\ .$$

Aufgabe G2 (Linearkombinationen)
Seien $a = (2,-1,0,4)$ und $b = (-1,3,2,-1)$. Entscheiden Sie welche der folgenden Vektoren Linearkombination von a und b sind.

(a) $c = (3,1,2,5)$

(b) $d = (0,5,4,2)$

Lösung:

(a) Das Gleichungssystem $c = \lambda a + \mu b$ hat keine Lösung, deshalb ist c keine Linearkombination von a und b.

(b) $d = a + 2b$.

Aufgabe G3 (Direkte Summe)
Seien V ein Vektorraum und A, B, C drei Untervektorräume von V. Zeigen Sie, dass die folgenden zwei Aussagen Äquivalent sind.

(i) $A+B+C = A \oplus B \oplus C$

(ii) $A+B = A \oplus B$ und $(A+B) \cap C = \{0\}$

Lösung:

- Angenommen es ist $A+B+C = A \oplus B \oplus C$.
  Seien $x, y \in A$ und $a, b \in B$ mit $x+a = y+b$. Dann gilt auch $x+a+0 = y+b+0$ mit $0 \in C$. Wegen der Vorraussetzung $A+B+C = A \oplus B \oplus C$ folgt daraus $x = y, a = b$ und $0 = 0$. D.h. $A+B = A \oplus B$.
  Seien $a \in A$, $b \in B$ und $c \in C$ mit $a+b = c$.
  Dann gilt $a+b-c = 0$ und $0+0+0 = 0$ mit $a, 0 \in A$, $b, 0 \in B$ und $c, 0 \in C$. Wegen $A+B+C = A \oplus B \oplus C$ folgt daraus $a = b = -c = 0$. Somit $(A+B) \cap C = \{0\}$.
- Angenommen es gilt $A+B = A \oplus B$ und $(A+B) \cap C = \{0\}$.
  Seien $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ und $c, c' \in C$ mit $a+b+c = a'+b'+c'$.
  Dann gilt $a-a'+b-b' = c'-c$. Wegen $(A+B) \cap C = \{0\}$ gilt also $a-a'+b-b' = c'-c = 0$, daraus folgt $c = c'$ und $a+b = a'+b'$.
  Wegen $A+B = A \oplus B$ ergibt sich auch $a = a'$ und $b+b'$.
  Somit gilt $A+B+C = A \oplus B \oplus C$.

Aufgabe G4 (Kern einer linearen Abbildung)
Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumw und $f : V \to W$ linear. Der Kern von f ist definiert als $Ker(f) = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $Ker(f)$ ein Untervektorraum von V ist.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

  (i) $Ker(f) = \{0\}$.

  (ii) f ist injektiv.

Lösung:

(a) Seien x und y Elemente von $Ker(f)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Aus $f(x) = f(y) = 0$ und der Linearität von f folgt $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = 0$.
Also ist $\lambda x + \mu y \in Ker(f)$.
Da außerdem $f(0) = 0$ und damit $0 \in Ker(f)$ gilt, folgt, dass $Ker(f)$ ein Untervektorraum von V ist.

(b)
- Angenommen f ist injektiv.
  Sei $x \in Ker(f)$. Aus $f(x) = f(0) = 0$ folgt $x = 0$ wegen der Injektivität.
  D.h. $Ker(f) = \{0\}$.
- Angenommen es gilt $Ker(f) = \{0\}$.
  Seien x und y Elemente von V mit $f(x) = f(y)$. Daraus folgt $f(x - y) = 0$ wegen der Lineariät von f. Wegen $Ker(f) = \{0\}$ gilt also $x - y = 0$. D.h. es ist $x = y$ und somit ist f injektiv.

Aufgabe G5 (Polynome)
Sei $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, wobei $\mathbb{R}[x]$ die Menge der Polynome mit reellen Koeffizienten und $D(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ ist.

(a) Ist $\mathbb{R}[x]$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

(b) Was ist $D(X^n)$?

(c) Ist D eine lineare Abbildung?

(d) Was ist der Kern von D?

Lösung:

(a) Ja.

(b) $D(X^n) = nX^{n-1}$ wenn $0 < n$ und $D(X^0) = 0$.

(c) Ja.

(d) $Ker(D) = \{\lambda \cdot X^0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Hausübung

Aufgabe H1 (Affine Unterräume)
Seien V ein Vektorraum und U und W zwei Untervektoräume von V. Seien $a, b \in V$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen.

(i) $a + U = b + W$

(ii) $U = W$ und $b - a \in U$

Lösung:

- Angenommen es gilt (i), d.h. $a + U = b + W$.
  Aus $b = b + 0 \in b + W = a + U$ und Aufgabe G1 (c) folgt $b + U = a + U = b + W$.
  Sei nun $u \in U$ dann gilt $b + u \in b + U = b + W$, woraus sich sofort $u \in W$ ergibt. D.h. es gilt $U \subseteq W$.
  Analog ergibt sich $W \subseteq U$.
  Insgesamt ist also $W = U$ und wegen Aufgabe G1 (b) auch $b - a \in U$.
  Die Aussage (ii) ist also erfüllt.
- Angenommen es gilt (ii), d.h. $U = W$ und $b - a \in U$.
  Dann folgt mit Hilfe von Aufgabe G1 (b) sofort $a + U = b + U = b + W$. Es gilt also (i).

w.z.b.w.

Aufgabe H2 (Vereinigung von Untervektorräumen)
Es seien V ein Vektorraum und U_1 und U_2 Untervektorräume von V. Welche Bedingung ist äquivalent zu der Aussage: $U_1 \cup U_2$ ist ein Untervektorraum von V?
Zeigen Sie diese Äquivalenz.

Lösung: $U_1 \cup U_2$ ist genau dann ein Untervektorraum von V, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.
Beweis:

- Angenommen es ist $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ dann gilt $U_1 \cup U_2 = U_1$ oder $U_1 \cup U_2 = U_2$. Da U_1 und U_2 Untervektorräume von V sind, gilt dies also auch für $U_1 \cup U_2$.
- Sei nun $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von V.
  Angenommen es gilt weder $U_1 \subseteq U_2$ noch $U_2 \subseteq U_1$. Dann gibt es ein Element $u_1 \in U_1$ mit $u_1 \notin U_2$ und ein Element $u_2 \in U_2$ mit $u_2 \notin U_1$.
  Wegen $u_1 \in U_1 \subseteq U_1 \cup U_2, u_2 \in U_2 \subseteq U_1 \cup U_2$ und da $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum ist, gilt: $u_1 + u_2 \in U_1 \cup U_2$.
  $u_1 + u_2$ liegt also in U_1 oder U_2.
  O.b.d.A. gelte $u_1 + u_2 \in U_1$. Daraus folgt $u_2 = u_1 + u_2 - u_1 \in U_1$. Dies ist ein Widerspruch zu $u_2 \notin U_1$.
  Es wurde also gezeigt, dass $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

w.z.b.w.

Aufgabe H3 (Affine Unterräume)
Es sei V ein $\mathbb{R}-$Vektorraum und A eine Teilmenge von V.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden zwei Aussagen.
   (i) A ist ein affiner Unterraum von V.
   (ii) A ist nicht leer und für alle $a, b \in A, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda a + (1-\lambda)b \in A\,.$$

(b) Was bedeutet die Bedingung (ii) geometrisch?

(c) Gilt die in (a) behauptete Äquivalenz immer noch, wenn man statt $\mathbb{R}$ den Grundkörper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und statt V den $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}-$Vektorraum $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}x\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ betrachtet? Beweisen Sie ihre Beheauptung.
   Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass es in $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ keinen Untervektorraum mit drei Elementen gibt.

Lösung:

(a)
- Angenommen A ist ein affiner Unterraum von V. Dann gibt es ein Element $a \in A$ und einen Untervektorraum U von V mit $A = a + U$. Insbesondere ist A nicht leer.
  Zwei beliebige Elemente aus A haben dann die Gestalt $a + u_1, a + u_2$ mit $u_1, u_2 \in U$. Wenn zusätzlich noch $\lambda \in \mathbb{R}$ ist nimmt der Aussdruck in Bedingung (ii) folgende Gestalt an.

$$\lambda(a+u_1) + (1-\lambda)(a+u_2) = \lambda a - \lambda u_1 + a + u_2 - \lambda a - \lambda u_2 = a + (u_2 - \lambda u_1 - \lambda u_2)$$

  Da U ein Untervektorraum ist, ist dies ein Element von $A = a + U$. Und damit ist (ii) gezeigt.
- Angenommen (ii) gilt.
  Da A nicht leer ist existiert ein Element $a \in A$. Man definiert $U := \{b - a \,|\, b \in A\}$. Dann gilt offensichtlich

$$a + U := \{a + u \,|\, u \in U\} = \{a + b - a \mid b \in A\} = \{b \mid b \in A\} = A\,.$$

  Zu zeigen bleibt, dass U ein Untervektorraum von V ist. Wegen

$$0 = a - a \in U$$

  gilt (U1).
  Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $u \in U$. Dann ist

$$a + u \in A \Rightarrow \lambda(a+u) + (1-\lambda)a \in A \Rightarrow a + \lambda u \in A \Rightarrow \lambda u \in U\,.$$

  Damit erfüllt U die Unterraumbedingung (U3).
  Seien $u_1, u_2 \in U$. Dann ist $a+u_1, a+u_2 \in A$. Wegen (ii) mit $\lambda = \frac{1}{2}$ gilt $a + \frac{1}{2}(u_1+u_2) = \frac{1}{2}(a+u_1) + \frac{1}{2}(a+u_2) \in A$.
  Also ist $\frac{1}{2}(u_1 + u_2) \in U$ und wegen der eben bewiesenen Eigenschaft (U3) folgt $u_1 + u_2 \in U$.
  Damit erfüllt U auch die Unterraumbedingung (U2) und ist also ein Untervektorraum von V.

w.z.b.w.

(b) Für zwei Elemente $a, b \in V$ ist die Menge $\{\lambda a + (1-\lambda)b \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die Gerade durch a und b.
   Die Bedingung (ii) sagt also, dass für zwei Elemente aus A auch die Gerade durch diese beiden Elemente in A liegt.

(c) Die Äquivalenz gilt in diesem Fall nicht mehr.

Beweis:

Man sieht leicht, dass es in $V = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ nur folgende Untervektorräume gibt:

$\{0\} = \{(0,0)\}, V = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}, \{(0,0),(1,0)\}, \{(0,0),(0,1)\}$ und $\{(0,0),(1,1)\}$.

Insbesondere gibt es keinen Untervektorraum mit drei Elementen und damit auch keinen affinen Unterraum mit drei Elementen.

Der Raum $A = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$ kann die Bedingung (i) also nicht erfüllen.

Der Ausdruck $\lambda a + (1-\lambda)b$ mit $\lambda \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (d.h. λ ist 0 oder 1) ist immer gleich a oder b. D.h. um Aussage (ii) zu erfüllen muss eine Menge nur nicht leer sein.

Die oben erwähnte Teilmenge A erfüllt also (ii), aber nicht (i).

Die in (a) behauptete Äquivalenz gilt also in diesem Fall nicht mehr.

w.z.b.w.