Lineare Algebra I
7. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
30. November 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Affine Unterräume)
Es sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Ein Affiner Unterraum A von V enthält die Null genau dann, wenn A bereits ein Untervektorraum von V ist.

(b) Für einen Untervektorraum U von V und Elemente $a, b \in V$ gilt

$$a + U = b + U \Leftrightarrow a - b \in U \Leftrightarrow b - a \in U\ .$$

(c) Für einen Untervektorraum U von V und Elemente $a, b \in V$ gilt

$$b \in a + U \Leftrightarrow a + U = b + U\ .$$

Aufgabe G2 (Linearkombinationen)
Seien $a = (2, -1, 0, 4)$ und $b = (-1, 3, 2, -1)$. Entscheiden Sie welche der folgenden Vektoren Linearkombination von a und b sind.

(a) $c = (3, 1, 2, 5)$

(b) $d = (0, 5, 4, 2)$

Aufgabe G3 (Direkte Summe)
Seien V ein Vektorraum und A, B, C drei Untervektorräume von V. Zeigen Sie, dass die folgenden zwei Aussagen Äquivalent sind.

(i) $A + B + C = A \oplus B \oplus C$

(ii) $A + B = A \oplus B$ und $(A + B) \cap C = \{0\}$

Aufgabe G4 (Kern einer linearen Abbildung)
Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumw und $f : V \to W$ linear. Der Kern von f ist definiert als $Ker(f) = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $Ker(f)$ ein Untervektorraum von V ist.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.
  (i) $Ker(f) = \{0\}$.
  (ii) f ist injektiv.

Aufgabe G5 (Polynome)
Sei $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, wobei $\mathbb{R}[x]$ die Menge der Polynome mit reellen Koeffizienten und $D(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ ist.

(a) Ist $\mathbb{R}[x]$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

(b) Was ist $D(X^n)$?

(c) Ist D eine lineare Abbildung?

(d) Was ist der Kern von D?

Hausübung

Aufgabe H1 (Affine Unterräume)
Seien V ein Vektorraum und U und W zwei Untervektoräume von V. Seien $a, b \in V$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen.

(i) $a + U = b + W$

(ii) $U = W$ und $b - a \in U$

Aufgabe H2 (Vereinigung von Untervektorräumen)
Es seien V ein Vektorraum und U_1 und U_2 Untervektorräume von V. Welche Bedingung ist äquivalent zu der Aussage: $U_1 \cup U_2$ ist ein Untervektorraum von V?
Zeigen Sie diese Äquivalenz.

Aufgabe H3 (Affine Unterräume)
Es sei V ein $\mathbb{R}-$Vektorraum und A eine Teilmenge von V.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden zwei Aussagen.

  (i) A ist ein affiner Unterraum von V.

  (ii) A ist nicht leer und für alle $a, b \in A, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda a + (1 - \lambda) b \in A .$$

(b) Was bedeutet die Bedingung (ii) geometrisch?

(c) Gilt die in (a) behauptete Äquivalenz immer noch, wenn man statt $\mathbb{R}$ den Grundkörper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und statt V den $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}-$Vektorraum $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} x \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ betrachtet? Beweisen Sie ihre Beheauptung.
Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass es in $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ keinen Untervektorraum mit drei Elementen gibt.