Lineare Algebra I
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
24. November 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Ein einfaches Körper)

(a) Definieren Sie die Verknüpfung $+$, damit $(\{0,1\},+,0)$ eine Gruppe ist.

(b) Definieren Sie die Verknüpfung $\cdot$, damit $(\{0,1\},+,\cdot,0,1)$ ein Körper ist.

(c) Ist $(\{0,1\},+,\cdot)$ ein $\{0,1\}$-Vektorraum?

(d) Was sind die Lösungen in $(\{0,1\},+,\cdot)$ des folgenden Gleichungssystems?

$$\begin{array}{cccc} x & +y & & =0 \\ x & & +z & =0 \\ & y & +z & =0 \end{array}$$

Lösung:

(a) $1+1 \overset{def}{=} 0$ und $1+0 \overset{def}{=} 0+1 \overset{def}{=} 1$.

(b) $1\cdot 1 \overset{def}{=} 1$ und $1\cdot 0 \overset{def}{=} 0\cdot 1 \overset{def}{=} 0\cdot 0$.

(c) Ja, jedes Körper $\mathbb{K}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(d) $x=y=z=0$ und $x=y=z=1$.

Aufgabe G2 (Vektorräume)

Nehmen Sie an, dass $(\mathbb{R},+,\cdot)$ und $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ Körper sind. Begründen Sie Ihre Antworte zu den folgenden Fragen.

(a) Ist $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ?

(b) Ist $(\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{Q}),+,\cdot)$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum? Wobei $\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{Q})$ die 2×3 Matrizen mit rationalen Koeffizienten sind.

(c) Ist $(\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{Q}),+,\cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

(d) Ist $(\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z}),+,\cdot)$ ein $\mathbb{Z}$-Vektorraum?

Lösung:

(a) Ja.

(b) Ja.

(c) Nein. Sei M die Matrix, die nur mit 1 gefüllt wird. $\sqrt{2}\cdot M$ ist nicht in $\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{Q})$.

(d) Nein, $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ist kein Körper!

Aufgabe G3 (Lineare Funktionen)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen linear sind.

(a) $$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ & x\mapsto 1 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ & x\mapsto 0 \end{aligned}$$

(c) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

(d) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{array}$

(e) $f: \begin{array}{l} \{0,1\} \to \{0,1\} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

Lösung:

(a) Nein, weil $f(0) = 1 \neq 0$ gilt.

(b) Ja.

(c) Nein, wegen $f(1+1) = f(2) = 4$ und $f(1) + f(1) = 2$.

(d) Ja.

(e) Ja, da f die Identität Funktion ist.

Aufgabe G4

(a) Seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Sei $f : V \to W$. Angenommen, es gilt $\forall \lambda \in \mathbb{K} : \forall x, y \in V : f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. Folgt daraus, dass f linear ist?

(b) Seien $f, g : V \to W$ zwei lineare Abbildungen und $\lambda \in \mathbb{K}$. Ist $\lambda \cdot f + g$ auch linear?

(c) Was kann man aus der obigen Antwort herleiten?

Lösung:

(a) Ja. Benutzen Sie die Eigenschaft einmal mit $\lambda = 1$, daraus folgt $f(x + y) = f(x) + f(y)$, einmal mit $x = y = 0$ und $\lambda = 1$, daraus folgt $f(0) = 0$, und einmal mit $y = 0$, daraus folgt $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

(b) Ja. $(\lambda f + g)(\alpha x + y) = \lambda f(\alpha x + y) + g(\alpha x + y) = \lambda \alpha f(x) + \lambda f(y) + \alpha g(x) + g(y) = \alpha(\lambda f + g)(x) + (\lambda f + g)(y)$.

(c) Die Menge der linearen Funktionen $V \to W$ ist ein Untervektorraum der Menge der Funktionen $V \to W$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Lineare Funktionen)
Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen linear sind.

(a) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 3x - 4y \end{array}$

(b) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 3x - 4y + 2 \end{array}$

(c) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy \end{array}$

(d) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2 \end{array}$

(e) $f: \begin{array}{l} \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\} \\ (x, y) \mapsto xy \end{array}$

Lösung:

(a) Ja.

(b) Nein, $f(0, 0) = 2 \neq 0$

(c) Nein, wegen $f(2, 2) = 4$ und $2 \cdot f(1, 1) = 2$.

(d) Nein, weil $f(2, 2) = 8$ und $2 \cdot f(1, 1) = 4$ gilt.

(e) Nein, weil $f(1, 1) = 1$ und $f(0, 1) + f(1, 0) = 0 + 0 = 0$ gilt.

Aufgabe H2 (Eine einfache Abbildung)
Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei f eine Abbildung $V \to V$, mit $\forall x \in V : \exists \lambda \in \mathbb{K} : f(x) = \lambda \cdot x$. Zeigen Sie $\exists \lambda \in \mathbb{K} : \forall v \in V : f(x) = \lambda \cdot x$. (Hinweis: Seien x und y in V. Betrachten Sie zuerst den Fall $x = \alpha y$ oder $y = \alpha x$, dann betrachten Sie $x + y$.)

Lösung: Für alle x in V, sei $\lambda(x)$, damit $f(x) = \lambda(x) \cdot x$. Seien x und y in $V - \{0\}$. Angenommen, dass $x = \alpha y$, dann gilt $\lambda(x)x = f(x) = \alpha f(y) = \alpha\lambda(y)y = \lambda(y)x$. Daraus folgt $\lambda(x) = \lambda(y)$. Ebenso wenn $y = \alpha x$. Angenommen, dass x und y nicht kollinear sind. Es gilt $\lambda(x+y)(x+y) = f(x+y) = f(x)+f(y) = \lambda(x)x + \lambda(y)y$. Somit $(\lambda(x+y) - \lambda(x))x = (\lambda(y) - \lambda(x+y))y$. Aber x und y sind nicht kollinear, deshalb $\lambda(x+y) - \lambda(x) = \lambda(y) - \lambda(x+y) = 0$. Daraus folgt, $\lambda(x) = \lambda(y)$. Die Funktion λ ist konstant über $V - \{0\}$.

Aufgabe H3

Sind die folgenden Mengen Untervektorräume bekannter Vektorräume?

(a) Die reellen $n \times m$ Matrizen, deren Summe der Koeffizienten Null ist.

(b) Die invertierbaren reellen $n \times n$ Matrizen.

(c) Die linearen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) Ja, es ist ein Untervektorraum der reellen $n \times m$ Matrizen.

(b) Es ist kein Vektorraum: sei M invertierbar, $M - M = 0$ ist nicht invertierbar.

(c) Ja, es ist ein Untervektorraum der Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.