Lineare Algebra I
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
24. November 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Ein einfaches Körper)

(a) Definieren Sie die Verknüpfung $+$, damit $(\{0,1\},+,0)$ eine Gruppe ist.

(b) Definieren Sie die Verknüpfung $\cdot$, damit $(\{0,1\},+,\cdot,0,1)$ ein Körper ist.

(c) Ist $(\{0,1\},+,\cdot)$ ein $\{0,1\}$-Vektorraum?

(d) Was sind die Lösungen in $(\{0,1\},+,\cdot)$ des folgenden Gleichungssystems?

$$\begin{array}{cccc} x & +y & & =0 \\ x & & +z & =0 \\ & y & +z & =0 \end{array}$$

Aufgabe G2 (Vektorräume)

Nehmen Sie an, dass $(\mathbb{R},+,\cdot)$ und $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ Körper sind. Begründen Sie Ihre Antworte zu den folgenden Fragen.

(a) Ist $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ?

(b) Ist $(\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{Q}),+,\cdot)$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum? Wobei $\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{Q})$ die 2×3 Matrizen mit rationalen Koeffizienten sind.

(c) Ist $(\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{Q}),+,\cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

(d) Ist $(\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z}),+,\cdot)$ ein $\mathbb{Z}$-Vektorraum?

Aufgabe G3 (Lineare Funktionen)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen linear sind.

(a) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 1 \end{array}$

(b) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 0 \end{array}$

(c) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2 \end{array}$

(d) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 2x \end{array}$

(e) $f: \begin{array}{l} \{0,1\}\to\{0,1\} \\ x\mapsto x^2 \end{array}$

Aufgabe G4

(a) Seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Sei $f: V\to W$. Angenommen, es gilt $\forall\lambda\in\mathbb{K}: \forall x,y\in V: f(\lambda x+y)=\lambda f(x)+f(y)$. Folgt daraus, dass f linear ist?

(b) Seien $f,g: V\to W$ zwei lineare Abbildungen und $\lambda\in\mathbb{K}$. Ist $\lambda\cdot f+g$ auch linear?

(c) Was kann man aus der obigen Antwort herleiten?

Hausübung

Aufgabe H1 (Lineare Funktionen)
Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen linear sind.

(a) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ (x,y)\mapsto 3x-4y \end{array}$

(b) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ (x,y)\mapsto 3x-4y+2 \end{array}$

(c) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ (x,y)\mapsto xy \end{array}$

(d) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ (x,y)\mapsto x^2+y^2 \end{array}$

(e) $f: \begin{array}{l} \{0,1\}\times\{0,1\}\to\{0,1\} \\ (x,y)\mapsto xy \end{array}$

Aufgabe H2 (Eine einfache Abbildung)
Sei $(\mathbb{K},+,\cdot)$ ein Körper und $(V,+,\cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei f eine Abbildung $V\to V$, mit $\forall x\in V:\exists\lambda\in\mathbb{K}: f(x)=\lambda\cdot x$. Zeigen Sie $\exists\lambda\in\mathbb{K}:\forall v\in V: f(x)=\lambda\cdot x$. (Hinweis: Seien x und y in V. Betrachten Sie zuerst den Fall $x=\alpha y$ oder $y=\alpha x$, dann betrachten Sie $x+y$.)

Aufgabe H3
Sind die folgenden Mengen Untervektorräume bekannter Vektorräume?

(a) Die reellen $n\times m$ Matrizen, deren Summe der Koeffizienten Null ist.

(b) Die invertierbaren reellen $n\times n$ Matrizen.

(c) Die linearen Funktionen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.