Lineare Algebra I
5. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
16. Dezember 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe und $a \in G$. Sei $f: \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto a \cdot x \end{array}$

(a) Ist f injektiv?

(b) Ist f surjektiv?

(c) Wenn f bijektiv wäre, was wäre f^{-1}?

Lösung:

(a) Seien $x, y \in G$, mit $f(x) = f(y)$. Es gilt $a \cdot x = a \cdot y$. Daraus folgt $a^{-1} \cdot a \cdot x = a^{-1} \cdot a \cdot y$ und $e \cdot x = e \cdot y$, d.h. $x = y$. Somit ist f injektiv.

(b) Sei $x \in G$. Es gilt $f(a^{-1} \cdot x) = a \cdot (a^{-1} \cdot x) = (a \cdot a^{-1}) \cdot x = e \cdot x = x$. Somit ist f surjektiv.

(c) $f^{-1}: \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto a^{-1} \cdot x \end{array}$.

Aufgabe G2 (Determinante für 2 × 2 Matrizen)

Die Determinante einer Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist gleich $ad - bc$.

(a) Berechnen Sie $det(I_2)$, wobei $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Vergleichen Sie $det(A)$ und $det(-A)$.

(c) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und λ eine reelle Zahl.

Vergleichen Sie $det(A)$, $det\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix}$, $det\begin{pmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{pmatrix}$, $det\begin{pmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$, $det\begin{pmatrix} a & \lambda b \\ c & \lambda d \end{pmatrix}$ und $det(\lambda \cdot A)$.

(d) Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ zwei Matrizen. Vergleichen Sie $det(A)det(B)$ und $det(AB)$.

Lösung:

(a) $det(I_2) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$.

(b) $det(-A) = det\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = (-a)(-d) - (-b)(-c) = ad - bc = det(A)$.

(c) $det\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} a & \lambda b \\ c & \lambda d \end{pmatrix} = \lambda det(A)$ und $det(\lambda \cdot A) = \lambda^2 det(A)$.

(d) $det(A)det(B) = det(AB)$.

Aufgabe G3
Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und g ein fest gewähltes Element von G.

(a) Zeigen Sie, dass $f: \begin{array}{l} G \to G \\ a \mapsto g\cdot a\cdot g^{-1} \end{array}$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Wenn f bijektiv ist, beschreiben Sie f^{-1}.

Lösung:

(a) $f(ab) = g\cdot a\cdot b\cdot g^{-1} = g\cdot a\cdot g^{-1}\cdot g\cdot b\cdot g^{-1} = f(a)\cdot f(b)$.

(b) $f^{-1}(a) = g^{-1}\cdot a\cdot g$.

Aufgabe G4 (Abschwächung der Definition von Gruppen)
Sei G eine Menge und $*: G\times G\to G$. $(G,*)$ ist eine schwache Gruppe, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- Assoziativität: $\forall a,b,c\in G: (a*b)*c = a*(b*c)$.
- Linksneutrales Element: es gibt $e\in G$, mit $e*a=a$ für alle $a\in G$.
- Linksinverses Element: $\forall a\in G: \exists b\in G: b*a=e$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Gruppe auch eine schwache Gruppe ist.

(b) Umgekehrt wollen wir jetzt zeigen, dass eine schwache Gruppe auch eine Gruppe ist.
   i. Sei $a,b\in G$. Angenommen, es gilt $b*a=e$ und $c*b=e$, zeigen Sie, dass $a*b=(c*b)*(a*b)$.
   ii. Mithilfe der obigen Teilaufgabe, zeigen Sie dann, dass $a*b=e$, d.h. jedes linksinverse Element ist auch rechtsinvers.
   iii. Sei $a\in G$. Mithilfe der obigen Teilaufgabe, zeigen Sie dann, $a*e=a$, d.h. jedes linksneutrale Element ist auch rechtsneutral.

Lösung:

(a) Ein neutrales Element ist auch linksneutral und ein inverses Element ist auch linksinvers.

(b) i. $a*b = e*(a*b)$, weil e linksneutral ist. Somit $a*b=(c*b)*(a*b)$ wegen die Annahme $c*b=e$.
   ii. Wegen der Assoziativität, gilt $a*b=(c*b)*(a*b)=c*(b*a)*b$. Wegen der Annahme $b*a=e$ gilt $a*b=c*e*b$. Aus $e*b=b$ folgt $a*b=c*(e*b)=c*b$. Somit $a*b=e$, weil $c*b=e$ gilt.
   iii. $a*e = a*(a^{-1}*a) = (a*a^{-1})*a = e*a = a$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$ (Sehr wichtig in Physik.))

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist so definiert: $\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3-x_3y_2\\ x_3y_1-x_1y_3\\ x_1y_2-x_2y_1\end{pmatrix}$

(a) Seien a und b Vektoren und λ eine reelle Zahle. Vergleichen Sie $a\times b$, $(\lambda\cdot a)\times b$, $a\times(\lambda\cdot b)$ und $(\lambda\cdot a)\times(\lambda\cdot b)$.

(b) Ist die Verknüpfung $\times$ kommutativ? (Wenn sie es nicht ist, vergleichen Sie $a\times b$ und $b\times a$.)

(c) Ist die Verknüpfung $\times$ assoziativ?(Wenn sie es nicht ist, vergleichen Sie $(a\times b)\times c$ und $a\times(b\times c)$.)

(d) Ist die Verknüpfung $\times$ rechtdistributiv, d.h. gilt es $(a+b)\times c = a\times c + b\times c$?
(Wenn sie es nicht ist, vergleichen Sie $(a+b)\times c$ und $a\times c+b\times c$.)

(e) Ist die Verknüpfung $\times$ linksdistributiv?

(f) Jacobi-Identität: berechnen Sie $a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b)$.

Lösung:

(a) $(\lambda\cdot a)\times b = a\times(\lambda\cdot b) = \lambda\cdot(a\times b)$ und $(\lambda\cdot a)\times(\lambda\cdot b) = \lambda^2\cdot(a\times b)$.

(b) Nein. $a\times b = -b\times a$.

(c) Nein. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$

(d) Ja.

(e) Ja. $a \times (b+c) = -(b+c) \times a = -b \times a - c \times a = a \times b + a \times c$.

(f) $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$.

Aufgabe H2 (Untergruppe)
Sei $(G, *)$ eine Gruppe und H eine Teilmenge von G. Zeigen Sie, dass $(H, *)$ eine Untergruppe von $(G, *)$ genau dann wenn H nicht die leere Menge ist und wenn $\forall a, b \in H : a * b^{-1} \in H$ gilt.

Lösung:

- Angenommen, dass $(H, *)$ eine Untergruppe von $(G, *)$ ist. Seien $a, b \in H$. Es gilt $b^{-1} \in H$, weil $(H, *)$ ein Gruppe ist, und es gilt $a * b^{-1} \in H$, auch weil $(H, *)$ ein Gruppe ist.
- Angenommen, dass H nicht die leere Menge ist und dass $\forall a, b \in H : a * b^{-1} \in H$ gilt. Sei $a \in H$. Dann gilt $a * a^{-1} = e \in H$. Und natürlich $\forall b \in H : e * b = b * e = b$, weil $b \in H \subseteq G$. Sei b in H. Dann Gilt $e * b^{-1} \in H$. Und natürlich $\forall b \in H : b * b^{-1} = b^{-1} * b = e$. Wir können beschließen, dass $(H, *)$ eine Untergruppe von $(G, *)$ ist.

Aufgabe H3 (Direkt Produkt)
Seien $(G, *, e)$ und $(G', *', e')$ zwei Gruppen. Sei eine Verknüpfung $\cdot : (G \times G') \times (G \times G') \to G \times G'$, damit $(x, x') \cdot (y, y') = (x * y, x' *' y')$.

(a) Zeigen Sie, dass $(G \times G', \cdot)$ eine Gruppe ist. Was ist das neutral Element?

(b) Zeigen Sie, dass $\Pi_1 : G \times G' \to G$, mit $\Pi_1(g, g') = g$, ein Gruppenhomomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\Sigma_1 : G \to G \times G'$, mit $\Sigma_1(g) = (g, e')$, ein Gruppenhomomorphismus ist.

(d) Jetzt wird angenommen, dass $G = G'$ abelsch ist, zeigen Sie, dass $\Phi : G \times G \to G$, mit $\Phi(g, g') = g * g'$, ein Gruppenhomomorphismus ist.

Lösung:

(a) Sei $(x, y) \in G \times G'$. Es gilt $(x, y) \cdot (e, e') = (x * e, y *' e') = (x, y)$ und $(e, e') \cdot (x, y) = (e * x, e' *' y) = (x, y)$. Somit ist (e, e') neutral. Außerdem $(x, y) \cdot (x^{-1}, y^{-1}) = (x * x^{-1}, y *' y^{-1}) = (e, e')$ und $(x^{-1}, y^{-1}) \cdot (x, y) = (x^{-1} * x,' y^{-1} * y) = (e, e')$.

(b) $\Pi_1((x, x') \cdot (y, y')) = \Pi_1((x * y, x' *' y')) = x * y = \Pi_1((x, x')) * \Pi_1((y, y'))$.

(c) $\Sigma_1(x * y) = (x * y, e') = (x, e') \cdot (y, e') = \Sigma_1(x) \cdot \Sigma_1(y)$.

(d) $\Phi((x, x') \cdot (y, y')) = \Phi((x * y, x' *' y')) = x * y * x' * y' = x * x' * y * y' = \Phi((x, x')) * \Phi((y, y'))$.