Lineare Algebra I
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
17. November 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe und $a \in G$. Sei $f: \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto a \cdot x \end{array}$

(a) Ist f injektiv?

(b) Ist f surjektiv?

(c) Wenn f bijektiv wäre, was wäre f^{-1}?

Aufgabe G2 (Determinante für 2×2 Matrizen)
Die Determinante einer Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist gleich $ad - bc$.

(a) Berechnen Sie $det(I_2)$, wobei $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Vergleichen Sie $det(A)$ und $det(-A)$.

(c) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und λ eine reelle Zahl.
Vergleichen Sie $det(A)$, $det\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix}$, $det\begin{pmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{pmatrix}$, $det\begin{pmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$, $det\begin{pmatrix} a & \lambda b \\ c & \lambda d \end{pmatrix}$ und $det(\lambda \cdot A)$.

(d) Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ zwei Matrizen. Vergleichen Sie $det(A)det(B)$ und $det(AB)$.

Aufgabe G3
Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und g ein fest gewähltes Element von G.

(a) Zeigen Sie, dass $f: \begin{array}{l} G \to G \\ a \mapsto g \cdot a \cdot g^{-1} \end{array}$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Wenn f bijektiv ist, beschreiben Sie f^{-1}.

Aufgabe G4 (Abschwächung der Definition von Gruppen)
Sei G eine Menge und $*: G \times G \to G$. $(G, *)$ ist eine schwache Gruppe, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- Assoziativität: $\forall a, b, c \in G: (a * b) * c = a * (b * c)$.
- Linksneutrales Element: es gibt $e \in G$, mit $e * a = a$ für alle $a \in G$.
- Linksinverses Element: $\forall a \in G : \exists b \in G: b * a = e$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Gruppe auch eine schwache Gruppe ist.

(b) Umgekehrt wollen wir jetzt zeigen, dass eine schwache Gruppe auch eine Gruppe ist.

i. Sei $a, b \in G$. Angenommen, es gilt $b * a = e$ und $c * b = e$, zeigen Sie, dass $a * b = (c * b) * (a * b)$.

ii. Mithilfe der obigen Teilaufgabe, zeigen Sie dann, dass $a * b = e$, d.h. jedes linksinverse Element ist auch rechtsinvers.

iii. Sei $a \in G$. Mithilfe der obigen Teilaufgabe, zeigen Sie dann, $a * e = a$, d.h. jedes linksneutrale Element ist auch rechtsneutral.

Hausübung

Aufgabe H1 (Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$ (Sehr wichtig in Physik.))

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist so definiert: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$

(a) Seien a und b Vektoren und λ eine reelle Zahle. Vergleichen Sie $a \times b$, $(\lambda \cdot a) \times b$, $a \times (\lambda \cdot b)$ und $(\lambda \cdot a) \times (\lambda \cdot b)$.

(b) Ist die Verknüpfung $\times$ kommutativ? (Wenn sie es nicht ist, vergleichen Sie $a \times b$ und $b \times a$.)

(c) Ist die Verknüpfung $\times$ assoziativ?(Wenn sie es nicht ist, vergleichen Sie $(a \times b) \times c$ und $a \times (b \times c)$.)

(d) Ist die Verknüpfung $\times$ rechtdistributiv, d.h. gilt es $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$?
(Wenn sie es nicht ist, vergleichen Sie $(a + b) \times c$ und $a \times c + b \times c$.)

(e) Ist die Verknüpfung $\times$ linksdistributiv?

(f) Jacobi-Identität: berechnen Sie $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b)$.

Aufgabe H2 (Untergruppe)
Sei $(G, *)$ eine Gruppe und H eine Teilmenge von G. Zeigen Sie, dass $(H, *)$ eine Untergruppe von $(G, *)$ genau dann wenn H nicht die leere Menge ist und wenn $\forall a, b \in H : a * b^{-1} \in H$ gilt.

Aufgabe H3 (Direkt Produkt)
Seien $(G, *, e)$ und $(G', *', e')$ zwei Gruppen. Sei eine Verknüpfung $\cdot : (G \times G') \times (G \times G') \to G \times G'$, damit $(x, x') \cdot (y, y') = (x * y, x' *' y')$.

(a) Zeigen Sie, dass $(G \times G', \cdot)$ eine Gruppe ist. Was ist das neutral Element?

(b) Zeigen Sie, dass $\Pi_1 : G \times G' \to G$, mit $\Pi_1(g, g') = g$, ein Gruppenhomomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\Sigma_1 : G \to G \times G'$, mit $\Sigma_1(g) = (g, e')$, ein Gruppenhomomorphismus ist.

(d) Jetzt wird angenommen, dass $G = G'$ abelsch ist, zeigen Sie, dass $\Phi : G \times G \to G$, mit $\Phi(g, g') = g * g'$, ein Gruppenhomomorphismus ist.