Lineare Algebra I
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
10. November 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Nilpotenz)

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie A^2, A^3 und A^4.

(b) Sei $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie B^2, B^3 und B^4.

Lösung:

(a) $A^2 = A^3 = A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B^3 = B^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe G2 (Gauß-Algorithmus, Gleichungssysteme)
Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme

(a)

$$\begin{aligned} -6x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2 \\ -9x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 8 & 3 & -9 \\ -4 & 14 & 5 & -15 \\ -2 & 6 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a)
$$\begin{array}{rrrr|rl}
-6 & 6 & 2 & -2 & 2 & S4 \longleftrightarrow S1 \\
-9 & 8 & 3 & -2 & 3 & \\
-3 & 2 & 1 & 0 & 7 & \\
\hline
-2 & 6 & 2 & -6 & 2 & \\
-2 & 8 & 3 & -9 & 3 & |Z2-Z1 \\
0 & 2 & 1 & -3 & 7 & \\
\hline
-2 & 6 & 2 & -6 & 2 & \\
0 & 2 & 1 & -3 & 1 & \\
0 & 2 & 1 & -3 & 7 & |Z3-Z2 \\
\hline
-2 & 6 & 2 & -6 & 2 & \\
0 & 2 & 1 & -3 & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6 &
\end{array}$$
Das Gleichungssystem besitzt keine Lösung.

(b)
$$\begin{array}{rrr|rl}
1 & 6 & -1 & 3 & \\
3 & 2 & 2 & -1 & |Z2-3Z1 \\
4 & 1 & 5 & -6 & |Z3-4Z1 \\
\hline
1 & 6 & -1 & 3 & \\
0 & -16 & 5 & -10 & \\
0 & -23 & 9 & -18 & |5Z3-9Z2 \\
\hline
1 & 6 & -1 & 3 & \\
0 & -16 & 5 & -10 & \\
0 & 29 & 0 & 0 &
\end{array}$$
d.h. $y_2 = 0$, $y_3 = -2$, $y_1 = 1$.

(c)
$$\begin{array}{rrrr|rl}
1 & 0 & 2 & 1 & 2 & \\
0 & 2 & 1 & -3 & 1 & \\
-2 & 8 & 3 & -9 & 3 & |Z3+2Z1 \\
-4 & 14 & 5 & -16 & 5 & |Z4+4Z1 \\
-2 & 6 & 2 & -6 & 2 & |Z5+2Z1 \\
\hline
1 & 0 & 2 & 1 & 2 & \\
0 & 2 & 1 & -3 & 1 & \\
0 & 8 & 7 & -7 & 7 & |Z3-4Z2 \\
0 & 14 & 13 & -11 & 13 & |Z4-7Z2 \\
0 & 6 & 6 & -4 & 6 & |Z5-3Z2 \\
\hline
1 & 0 & 2 & 1 & 2 & \\
0 & 2 & 1 & -3 & 1 & \\
0 & 0 & 3 & 5 & 3 & \\
0 & 0 & 6 & 10 & 6 & \\
0 & 0 & 3 & 5 & 3 & \\
\hline
1 & 0\ 2 & 1 & 2 & & \\
0 & 2 & 1 & -3 & 1 & \\
0 & 0 & 3 & 5 & 3 &
\end{array}$$
Damit ist $z_3 = 1 - 5/3z_4$, $z_2 = 7/3z_4$, $z_1 = 7/3z_4$, also
$$L = \{\vec{z} \in \mathbb{R}^4 : \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7/3 \\ 7/3 \\ -5/3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Aufgabe G3 (Vektoren- und Matrizenmultiplikation)

Seien $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Wann ist $\alpha \cdot \beta$ definiert, wobei $\alpha, \beta \in \{x, y, z, A, B, C\}$? Berechnen Sie gegebenenfalls die resultierende Matrix.

(b) Wenn $\alpha \cdot \beta$ nicht definiert ist, bestimmen Sie ob $\alpha^t \cdot \beta$ definiert ist, wobei β kein Vektor ist. Berechnen Sie gegebenenfalls die resultierende Matrix.

(c) Berechnen Sie $\alpha \cdot \alpha^t$ und $\alpha^t \cdot \alpha$ wobei $\alpha \in \{x, y, z\}$.

Lösung:

(a) $Ax = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $Cx \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $By = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $AA = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 6 & 10 & 2 \end{pmatrix}$, $CA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \\ 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $CB = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $x^tA = \begin{pmatrix} 5 & 8 \end{pmatrix}$, $x^tB = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ und $z^tC = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $x^t \cdot x = (5)$, $y^t \cdot y = (10)$, $z^t \cdot z = (5)$. $x \cdot x^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $y \cdot y^t = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $z \cdot z^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe G4 (Kommutativität)
Berechnen Sie jeweils alle reellen 2×2-Matrizen, die mit der Matrix M vertauschen.

(a) $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

(b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) Alle reellen 2×2-Matrizen: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$

(b) Alle Diagonalmatrizen: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$. Die zwei Matrizen vertauschen genau dann wenn $2c = c$ und $2b = b$.

(c) Alle $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$: weil $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$. Also, die zwei Matrizen vertauschen genau dann wenn $b = c$ und $a = d$.

Hausübung

Aufgabe H1

(a) Vergleichen Sie die Matrizen Ax und x^tA aus Aufgabe G3.

(b) Welche Bedingung muss für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gelten, damit $(Ax)^t = x^tA$ für beliebige $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gilt?

Lösung:

(a) $(Ax)^t = x^tA$.

(b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy & bx + dy \end{pmatrix}$. Daraus folgt, dass $(Ax)^t = x^tA$ gilt, genau dann wenn $ax + by = ax + cy$ und $cx + dy = bx + dy$ für beliebige x und y, d.h. wenn $c = b$.

Aufgabe H2
Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme im $\mathbb{R}^n$ richtig sind und begründen Sie Ihre Antworten. Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

(a) Die Lösungsmenge enthält die Null in $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn das System homogen ist.

(b) Ist die Anzahl der Gleichungen m größer als die Zahl der Variablen n, so hat das System keine Lösungen.

(c) Es gibt nur dann eine Lösung, wenn mindestens ein Koeffizient a_{ij} gleich Null ist.

(d) Das System hat genau dann eine Lösung, wenn es in Stufenform gebracht werden kann.

(e) Ist bei einem homogenen System die Anzahl der Gleichungen m kleiner als die Anzahl der Variablen n, so gibt es Lösungen, die nicht gleich Null sind.

(f) Die Anzahl der Lösungen ist gleich der Anzahl der Pivotvariablen.

(g) Gilt $r = n$, ist also der Rang gleich der Anzahl der Variablen, so ist das System eindeutig lösbar.

Lösung:

(a) Richtig: die Null in $\mathbb{R}^n$ ist eine Lösung genau wenn alle Koeffizienten b_i sind Null.

(b) Falsch: Betrachten Sie das System $\begin{array}{c} x = 0 \\ x = 0 \end{array}$ mit zwei Zeilen und einer Variable.

(c) Falsch: Betrachten Sie das System $x = 0$.

(d) Falsch. Jedes lineare Gleichungssystem kann in Stufenform gebracht werden.

(e) Richtig. Denn dann gibt es mindestens eine Pivotvariable , die ungleich Null gewählt werden kann.

(f) Falsch: Betrachten Sie das System $x - y = 0$. Es gibt unendliche viele Lösungen und nur endliche viele Pivotvariablen.

(g) Richtig. Es gibt in diesem Fall keine Pivotvariablen

Aufgabe H3

Entscheiden Sie jeweils ob die folgenden Teilmengen von $M_n(\mathbb{R}), n \geq 2$, abgeschlossen unter Matrizenaddition bzw. Multiplikation sind.

(a) Die oberen Dreiecksmatrizen.

(b) Die Diagonalmatrizen.

(c) Die Matrizen, bei denen die erste Zeile nur Nullen enthält.

(d) Die Matrizen mit ausschließlich negativen Einträgen.

(e) Matrizen mit rationalen Einträgen.

(f) Matrizen, bei denen die Summe aller Einträge Null ergibt.

Lösung:

(a) Addition: Ja; Multiplikation: Ja, weil $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \times (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, wobei $c_{ij} = \sum_{1\leq k\leq n} a_{ik} b_{kj}$. Angenommen $j < i$, dann gilt entweder $k < i$ oder $j < k$, somit $a_{ik} = 0$ oder $b_{kj} = 0$. Daraus folgt $c_{ij} = 0$.

(b) Addition: Ja; Multiplikation: Ja.

(c) Addition: Ja; Multiplikation: Ja.

(d) Addition: Ja; Multiplikation: Nein, es wird nur positive Einträgen geben.

(e) Addition: Ja; Multiplikation: Ja, weil die Summe oder das Produkt zweier rationaler Zahlen wieder rational ist.

(f) Addition: Ja; Multiplikation: Nein, z.B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.