Lineare Algebra I
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
10. November 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Nilpotenz)

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie A^2, A^3 und A^4.

(b) Sei $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie B^2, B^3 und B^4.

Aufgabe G2 (Gauß-Algorithmus, Gleichungssysteme)
Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme

(a)

$$\begin{aligned} -6x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2 \\ -9x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 8 & 3 & -9 \\ -4 & 14 & 5 & -15 \\ -2 & 6 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G3 (Vektoren- und Matrizenmultiplikation)

Seien $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Wann ist $\alpha \cdot \beta$ definiert, wobei $\alpha, \beta \in \{x, y, z, A, B, C\}$? Berechnen Sie gegebenenfalls die resultierende Matrix.

(b) Wenn $\alpha \cdot \beta$ nicht definiert ist, bestimmen Sie ob $\alpha^t \cdot \beta$ definiert ist, wobei β kein Vektor ist. Berechnen Sie gegebenenfalls die resultierende Matrix.

(c) Berechnen Sie $\alpha \cdot \alpha^t$ und $\alpha^t \cdot \alpha$ wobei $\alpha \in \{x, y, z\}$.

Aufgabe G4 (Kommutativität)
Berechnen Sie jeweils alle reellen 2×2-Matrizen, die mit der Matrix M vertauschen.

(a) $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

(b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Hausübung

Aufgabe H1

(a) Vergleichen Sie die Matrizen Ax und x^tA aus Aufgabe G3.

(b) Welche Bedingung muss für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gelten, damit $(Ax)^t = x^tA$ für beliebige $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gilt?

Aufgabe H2
Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme im $\mathbb{R}^n$ richtig sind und begründen Sie Ihre Antworten. Betrachten Sie das Gleichungssystem
$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

(a) Die Lösungsmenge enthält die Null in $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn das System homogen ist.

(b) Ist die Anzahl der Gleichungen m größer als die Zahl der Variablen n, so hat das System keine Lösungen.

(c) Es gibt nur dann eine Lösung, wenn mindestens ein Koeffizient a_{ij} gleich Null ist.

(d) Das System hat genau dann eine Lösung, wenn es in Stufenform gebracht werden kann.

(e) Ist bei einem homogenen System die Anzahl der Gleichungen m kleiner als die Anzahl der Variablen n, so gibt es Lösungen, die nicht gleich Null sind.

(f) Die Anzahl der Lösungen ist gleich der Anzahl der Pivotvariablen.

(g) Gilt $r = n$, ist also der Rang gleich der Anzahl der Variablen, so ist das System eindeutig lösbar.

Aufgabe H3
Entscheiden Sie jeweils ob die folgenden Teilmengen von $M_n(\mathbb{R}), n \geq 2$, abgeschlossen unter Matrizenaddition bzw. Multiplikation sind.

(a) Die oberen Dreiecksmatrizen.

(b) Die Diagonalmatrizen.

(c) Die Matrizen, bei denen die erste Zeile nur Nullen enthält.

(d) Die Matrizen mit ausschließlich negativen Einträgen.

(e) Matrizen mit rationalen Einträgen.

(f) Matrizen, bei denen die Summe aller Einträge Null ergibt.