Lineare Algebra I
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux

WS 2010/2011
4. November 2010

Gruppenübung

Die reellen Zahlen haben die folgenden Eigenschaften, die auch Gesetze genannt werden.

Assoziativität	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a(bc)=(ab)c$
Neutrale Elemente	$a+0=a$	$1\cdot a=a$
Inverse Elemente	$a+(-a)=0$	$a\neq 0 \Rightarrow a\cdot\frac{1}{a}=1$
Kommutativität	$a+b=b+a$	$ab=ba$
Distributivität	$a(b+c)=ab+ac$	

Aufgabe G1

(a) Zeigen Sie nur mithilfe der Gesetze, dass $(a+(b+c))+d=(a+b)+(c+d)$ für alle $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ gilt.

(b) Zeigen Sie nur mithilfe der Gesetze, dass $1\cdot 0=0$ gilt.

(c) Sei $0'$ in $\mathbb{R}$, damit $\forall a\in\mathbb{R}$, $0'+a=0'$. Zeigen Sie nur mithilfe der Gesetzer, dass $0'=0$ gilt.

(d) Zeigen Sie nur mithilfe der Gesetze, dass $\forall X\in\mathbb{R}$, $0\cdot X+0\cdot X=0\cdot X$ gilt.

(e) Zeigen Sie nur mithilfe der Gesetze und der obigen Aufgabe, dass $\forall X\in\mathbb{R}$, $0\cdot X=0$ gilt.

Lösung:

(a) $(a+(b+c))+d=((a+b)+c)+d=(a+b)+(c+d)$.

(b) $\forall a\in\mathbb{R}$, $1\cdot a=a$, folgt $1\cdot 0=0$.

(c) Wegen der Annahme $\forall a\in\mathbb{R}$, $0'+a=0'$, folgt $0'+0=0'$. Wegen des Gesetzes über das Neutrale Element, folgt $0'+0=0$. Daraus folgt $0'=0$.

(d) $0\cdot X+0\cdot X=X\cdot 0+X\cdot 0=X\cdot(0+0)=X\cdot 0$.

(e) Einerseits $(0\cdot X+0\cdot X)+(-(0\cdot X))=0\cdot X+(0\cdot X+(-(0\cdot X)))=0\cdot X+0=0\cdot X$ (Gesetze), andererseits $(0\cdot X+0\cdot X)+(-(0\cdot X))=0\cdot X+(-(0\cdot X))=0$ (obige Aufgabe). Daraus folgt $0\cdot X=0$.

Aufgabe G2

Seien $a,b,c,x\in\mathbb{R}$. Angenommen, dass $ax+b=c$ gilt. Berechnen Sie x mithilfe der Gesetze. (Hinweis: es gibt verschiedene Fälle.)

Lösung:

(a) Wenn $a=0$, dann gilt $a\cdot x=0$ für alle reelle Zahle x. Dann gibt es die zwei folgenden Fälle.
   i. $b=c$: In diesem Fall sind alle reellen Zahlen Lösungen der Gleichung.
   ii. $b\neq c$: In diesem Fall hat die Gleichung keine Lösung in den reellen Zahlen.

(b) Wenn $a\neq 0$,
   - $ax+b=c$
   - $(ax+b)+(-b)=c+(-b)$
   - $ax+(b+(-b))=c+(-b)$
   - $ax+0=c+(-b)$
   - $ax=c+(-b)$
   - $\frac{1}{a}(ax)=\frac{1}{a}(c+(-b))$
   - $(\frac{1}{a}a)x=\frac{1}{a}(c+(-b))$

- $1 \cdot x = \frac{1}{a}(c + (-b))$
- $x = \frac{1}{a}(c + (-b))$

Aufgabe G3 (Vektoren Addition und skalare Multiplikation)
Vektoren von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sind Paare (x, y), wobei x und y reelle Zahlen sind. Die Addition zweier solcher Vektoren wird so definiert: $(x,y) +_v (x' + y') \overset{def}{=} (x + x', y + y')$ und man schreibt einfach $+$ statt $+_v$, wenn es selbsverständlich ist, worum es geht. $-(x, y)$ ist eine Notation für $(-x, -y)$. Zeigen Sie, dass die Vektorenaddition die obigen Gesetze der Addition in den reellen Zahlen erfüllt.

Lösung:

(a) Assoziativität: $(a_1, a_2) + ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) = (a_1, a_2) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2) = (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2))$ wegen der Definition der Vektorenaddition. Daraus folgt $(a_1, a_2) + ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) = ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2)$ wegen der Assoziativität der Addition. Also ist $(a_1, a_2) + ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) + (c_1, c_2) = ((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) + (c_1, c_2)$ wegen der Definition der Vektorenaddition.

(b) Neutrale Elemente: $(a_1, a_2) + (0, 0) = (a_1, a_2)$

(c) Inverse Elemente: $(a_1, a_2) + (-(a_1, a_2)) = (0, 0)$

(d) Kommutativität: $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (b_1, b_2) + (a_1, a_2)$

Aufgabe G4
Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme.

(a)

$$\begin{array}{cccc} 2x & +y & -z & +t = 0 \\ x & +3y & & -t = 1 \\ & y & & +t = -2 \\ & -2y & & -2t = 1 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ccc} x & +y & +z = 0 \\ x & -y & +z = 0 \\ -x & -y & -z = 0 \end{array}$$

Lösung:

(a) Multiplizieren Sie die vorletzte Zeile mit -2. Daraus folgt $-2y - 2t = 4$. Aber gemäßder letzten Zeile gilt $-2y - 2t = 1$, was ein Widerspruch ist. Deshalb gibt es keine Lösung.

(b) Die letzte Zeile ist wie die erste, die mit -1 multipliziert wurde. Aus der ersten Zeile minus die zweite Zeile, leitet man $y = 0$ her. Aus der Summe der zwei ersten Zeilen, folgt $z = -x$. Die Lösungsmenge ist also $\{(x, y, z) \mid y = 0 \land z = -x\}$.

Aufgabe G5 (Gauss)

(a)

$$\begin{array}{ccc} x & +y & +z = 1 \\ x & +2y & +4z = 2 \\ x & +3y & +9z = 3 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{cccc} 2x & & & +4t = 1 \\ x & +3y & -2z & -t = 3 \\ & & & t = -2 \\ x & -2y & & -2t = 3 \end{array}$$

Lösung:

(a) Die einzige Lösung ist $x = z = 0$ und $y = 1$.

(b) $t = -2$, dann kann man x bestimmen, dann y, und endlich z.

Hausübung

Aufgabe H1 (Skalarmultiplikation)

Für $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$ ist die Skalarmultiplikation so definiert: $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$. Was könnten in diesem Zusammenhang die Begriffe Assoziativität, Neutrale Elemente, Inverse Elemente, Kommutativität und Distributivität bedeuten?

Zeigen oder widerlegen Sie die genannten Gesetze für die Skalarmultiplikation. Verwenden Sie dabei nur die entsprechenden Gesetze für die reellen Zahlen.

Lösung:

(a) Assoziativität: $\lambda \cdot (\mu \cdot (x, y)) = (\lambda \cdot \mu)(x, y)$

(b) Neutrale Elemente: $1 \cdot (x, y) = (x, y)$

(c) Inverse Elemente: sinnlos.

(d) Kommutativität: $\lambda \cdot (\mu \cdot (x, y)) = \mu \cdot (\lambda \cdot)(x, y)$

(e) Distributivität: $\lambda((x, y) + (z, t)) = \lambda(x, y) + \lambda(z, t)$ und $(\lambda + \mu)(x, y) = \lambda(x, y) + \mu(x, y)$

Aufgabe H2 (Gauss)

(a)

$$\begin{array}{rrrrl} x & +y & +z & +t & = 1 \\ x & +2y & +4z & +8t & = 2 \\ x & +3y & +9z & +27t & = 3 \\ x & -y & +z & -t & = -1 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrrl} x & +y & & & = 1 \\ & & 4z & +8t & = 2 \\ x & +3y & & & = 3 \\ & & +z & -t & = -1 \end{array}$$

Lösung:

(a) $x = z = t = 0$ und $y = 1$.

(b) Dieses lineare Gleichungssystem zerfällt in zwei unabhängige Gleichungssysteme mit jeweils zwei Unbekannten. Diese können unabhängig voneinander gelöst werden. $x = 0, y = 1, z = -\frac{1}{2}$ und $t = \frac{1}{2}$.