Lineare Algebra I
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux

WS 2010/2011
4. November 2010

Gruppenübung

Die reellen Zahlen haben die folgenden Eigenschaften, die auch Gesetze genannt werden.

Assoziativität	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a(bc)=(ab)c$
Neutrale Elemente	$a+0=a$	$1\cdot a=a$
Inverse Elemente	$a+(-a)=0$	$a\neq 0\Rightarrow a\cdot\frac{1}{a}=1$
Kommutativität	$a+b=b+a$	$ab=ba$
Distributivität	$a(b+c)=ab+ac$	

Aufgabe G1

(a) Zeigen Sie nur mithilfe der Gesetze, dass $(a+(b+c))+d=(a+b)+(c+d)$ für alle $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ gilt.

(b) Zeigen Sie nur mithilfe der Gesetze, dass $1\cdot 0=0$ gilt.

(c) Sei $0'$ in $\mathbb{R}$, damit $\forall a\in\mathbb{R}$, $0'+a=0'$. Zeigen Sie nur mithilfe der Gesetzer, dass $0'=0$ gilt.

(d) Zeigen Sie nur mithilfe der Gesetze, dass $\forall X\in\mathbb{R}$, $0\cdot X+0\cdot X=0\cdot X$ gilt.

(e) Zeigen Sie nur mithilfe der Gesetze und der obigen Aufgabe, dass $\forall X\in\mathbb{R}$, $0\cdot X=0$ gilt.

Aufgabe G2

Seien $a,b,c,x\in\mathbb{R}$. Angenommen, dass $ax+b=c$ gilt. Berechnen Sie x mithilfe der Gesetze. (Hinweis: es gibt verschiedene Fälle.)

Aufgabe G3 (Vektoren Addition und skalare Multiplikation)

Vektoren von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sind Paare (x,y), wobei x und y reelle Zahlen sind. Die Addition zweier solcher Vektoren wird so definiert: $(x,y)+_v(x'+y')\stackrel{def}{=}(x+x',y+y')$ und man schreibt einfach $+$ statt $+_v$, wenn es selbsverständlich ist, worum es geht. $-(x,y)$ ist eine Notation für $(-x,-y)$. Zeigen Sie, dass die Vektorenaddition die obigen Gesetze der Addition in den reellen Zahlen erfüllt.

Aufgabe G4

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme.

(a)

$$\begin{array}{rrrrl} 2x & +y & -z & +t & =0 \\ x & +3y & & -t & =1 \\ & y & & +t & =-2 \\ & -2y & & -2t & =1 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & =0 \\ x & -y & +z & =0 \\ -x & -y & -z & =0 \end{array}$$

Aufgabe G5 (Gauss)

(a)

$$\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & =1 \\ x & +2y & +4z & =2 \\ x & +3y & +9z & =3 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrrl} 2x & & & +4t & = 1 \\ x & +3y & -2z & -t & = 3 \\ & & & t & = -2 \\ x & -2y & & -2t & = 3 \end{array}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Skalarmultiplikation)
Für $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$ ist die Skalarmultiplikation so definiert: $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$. Was könnten in diesem Zusammenhang die Begriffe Assoziativität, Neutrale Elemente, Inverse Elemente, Kommutativität und Distributivität bedeuten?

Zeigen oder widerlegen Sie die genannten Gesetze für die Skalarmultiplikation. Verwenden Sie dabei nur die entsprechenden Gesetze für die reellen Zahlen.

Aufgabe H2 (Gauss)
(a)

$$\begin{array}{rrrrl} x & +y & +z & +t & = 1 \\ x & +2y & +4z & +8t & = 2 \\ x & +3y & +9z & +27t & = 3 \\ x & -y & +z & -t & = -1 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrrl} x & +y & & & = 1 \\ & & 4z & +8t & = 2 \\ x & +3y & & & = 3 \\ & & +z & -t & = -1 \end{array}$$