Lineare Algebra I
2. Übungsblatt

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux

WS 2010/2011
28. Oktober 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Kartesisches Produkt.)

(a) Was sind die Elemente des Produkt $(\{1,2,3\} \times \{4,5\})$?

(b) Was sind die Elemente des Produkts $\{1,2,3\} \times \{0\}$?

(c) Sei A eine Menge mit n Elemente. Wie viele Elemente gibt es in $A \times \{3\}$?

(d) Was sind die Elemente des Produkts $\{1,2,3\} \times \emptyset$? Was ist eigentlich die Menge $\{1,2,3\} \times \emptyset$?

Lösung:

(a) $(1,4),(2,4),(3,4),(1,5),(2,5),(3,5)$.

(b) $(1,0),(2,0),(3,0)$.

(c) n Elemente.

(d) Es gibt kein Element, weil $\{1,2,3\} \times \emptyset = \emptyset$.

Aufgabe G2 (Modulo.)

Eine Relation zwischen ganzen Zahle ist so definiert: n und m stehen in Relation genau dann, wenn die Differenz $n-m$ durch 5 teilbar ist.

(a) Zeigen Sie, dass diese Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

(b) Wie viele Äquivalenzklassen gibt es?

(c) Was sind sie genau?

Lösung:

(a)
- Reflexivität: sei $n \in \mathbb{Z}$. n und n stehen in Relation, weil $n-n=0$ durch 5 teilbar ist.
- Symmetrie: Wenn $n-m$ durch 5 teilbar ist, so ist $m-n$.
- Transitivität: Angenommen, dass n und m in Relation stehen und dass m und p auch in Relation stehen. So es gibt k und l in $\mathbb{Z}$, sodass $n-m=5k$ und $m-p=5l$. Daraus folgt, dass $n-p=(n-m)+(m-p)=5(k+l)$, d.h. $n-p$ durch 5 teilbar ist.

(b) Es gibt 5 Klassen.

(c) Die sind die Mengen $\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, n = 5k+i\}$ für $i=0,1,2,3,4$.

Aufgabe G3 (Abbildung, Teilmenge und Schnittmenge.)

Seien M und N zwei Mengen und f eine Abbildung von M nach N. Seien A und B zwei Teilmenge von M

(a) Wenn $A \subseteq B$, wie kann man $f(A)$ und $f(B)$ vergleichen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Für beliebige A und B, wie kann man $f(A \cap B)$ und $f(A) \cap f(B)$ vergleichen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a) Angenommen $A \subseteq B$. Wenn $f(A)$ die leere Menge ist, gilt $f(A) \subseteq f(B)$. Jetzt angenommen, dass $f(A)$ nicht leer ist, sei y in $f(A)$. Wegen der Definition $f(A) = \{y \in N \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$ sei x in M, sodass $f(x) = y$. Wegen $A \subseteq B$ ist auch x in B. Daraus folgt, dass $y = f(x)$ auch in $f(B)$ ist. Das gilt für alle y in $f(A)$, d.h. $f(A) \subseteq f(B)$.

(b) - $A \cap B \subseteq A$ wegen der Definition der Schnittmenge. Daraus folgt $f(A \cup B) \subseteq f(A)$ wegen der obigen Teilaufgabe. Ebenso gilt $f(A \cup B) \subseteq f(B)$. Wegen der Definition der Schnittmenge folgt $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
    - Sei $f : \{0,1\} \to \{2\}$. Gilt $f(\{0\}) \cap f(\{1\}) = \{2\}$ und $f(\{0\} \cap \{1\}) = \emptyset$.

Aufgabe G4 (Injektiv, surjektiv in $\mathbb{R}$.)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. In diesen folgenden Fällen entscheiden Sie, ob f injektiv, surjektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $f(x) = x$

(b) $f(x) = -3x + 5$

(c) $f(x) = x^2$

Lösung:

(a) - Sei y in $\mathbb{R}$. Sei $x = y$. Es gilt $f(x) = y$, so ist f surjektiv.
    - Sei x und y in $\mathbb{R}$, sodass $f(x) = f(y)$. Wegen der Definition von f gilt $x = y$, deshalb ist f injektiv.

(b) - Sei y in $\mathbb{R}$. Sei $x = \frac{5-y}{3}$. Es gilt $f(x) = y$, so ist f surjektiv.
    - Sei x und y in $\mathbb{R}$, sodass $f(x) = f(y)$. Wegen der Definition von f gilt $-3x+5 = -3y+5$, d.h. $x = y$, deshalb ist f injektiv.

(c) Es gibt kein x in $\mathbb{R}$, sodass $f(x) = -1$, deshalb ist f nicht surjektiv.

(d) Wegen $f(-1) = 1 = f(1)$ ist f nicht injektiv.

Aufgabe G5 (Injektiv, surjektiv in $\mathbb{R}^2$.)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. In diesen folgenden Fällen entscheiden Sie, ob f injektiv, surjektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $f(x,y) = (x,y)$

(b) $f(x,y) = (x+1, -y)$

Lösung:

(a) - Sei (x,y) in $\mathbb{R}^2$. Wegen der Definition gilt $f(x,y) = (x,y)$, so ist f surjektiv.
    - Aus $f(x,y) = f(x',y')$ folgt $(x,y) = (x',y')$, deshalb ist f injektiv.

(b) - Sei (x,y) in $\mathbb{R}^2$. Gilt $f(x-1,-y) = ((x-1)+1, -(-y)) = (x,y)$, so ist f surjektiv.
    - Aus $f(x,y) = f(x',y')$ folgt $(x+1,-y) = (x'+1,-y')$, d.h. $x+1 = x'+1$ und $-y = -y'$. Daraus folgt $x = x'$ und $y = y'$, und $(x,y) = (x',y')$. Deshalb ist f injektiv.

Hausübung

Aufgabe H1 (Abbildung, Vereinigung und Komplement.)
Seien M und N zwei Mengen und f eine Abbildung von M nach N. Seien A und B zwei Teilmenge von M

(a) Wie kann man $f(A \cup B)$ und $f(A) \cup f(B)$ vergleichen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Ebenso mit $f(M \backslash A)$ und $N \backslash f(A)$.

Lösung:

(a) - Aus $A \subseteq A \cup B$ folgt $f(A) \subseteq f(A \cup B)$. Ebenso gilt $f(B) \subseteq f(A \cup B)$, deshalb $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$.
    - Wenn $f(A \cup B) = \emptyset$, ist $A \cup B$ auch leer. Daraus folgt, dass A und B auch leer sind, und auch $f(A)$ und $f(B)$, deshalb ist $f(A) \cup f(B)$ auch leer. Angenommen $f(A \cup B) \neq \emptyset$, sei $y \in f(A \cup B)$. Wegen der Definition gibt es $x \in A \cup B$, sodass $f(x) = y$. Wegen der Definition der Vereinigung gilt $x \in A$ oder $x \in B$. Wenn $x \in A$, gilt $y = f(x) \in f(A)$. Wenn $x \in B$, gilt $y = f(x) \in f(B)$. Auf jeden FÃďlle ist y in $f(A) \cup f(B)$. Deshalb $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$.

(b) Sei $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ sodass $f(0) = f(1) = 0$. In diesem Fall $f(\{0,1\} \backslash \{1\}) = \{0\}$ und $\{0,1\} \backslash \{f(1)\} = \{1\}$. Deshalb können diese Mengen nicht verglichen werden.

Aufgabe H2 (Injektiv und surjektiv.)
In diesen folgenden Fällen entscheiden Sie, ob f injektiv, surjektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sodass $f(x,y) = (x+y, x-y)$.

(b) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass $f(x) = x^2$.

Lösung:

(a) Seien $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Die Funktion f ist surjektiv, weil $f(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}) = (\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}) = (x, y)$. Seien (x, y) und (x', y'), sodass $f(x, y) = f(x', y')$. Gilt $x + y = x' + y'$ und $x - y = x' - y'$, deshalb $(x + y) + (x - y) = (x' + y') + (x' - y')$, d.h. $2x = 2x'$ und so $x = x'$. Ebenso $y = y'$. Deshalb ist f injektiv.

(b) f ist injektiv aber nicht surjektif. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \neq 2$.

Aufgabe H3 (Eigenschaften der Injektivität und der Surjektivität.)
Seien A, B und C drei Mengen. Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Funktion.

(a) Angenommen, dass $g \circ f$ bijektiv ist, zeigen Sie, dass f injektiv ist und g surjektiv ist.

(b) Finden Sie ein Beispiel, damit $g \circ f$ nicht bijektiv ist, obwohl f injektiv ist und g surjektiv ist.

(c) Finden Sie ein Beispiel, damit $g \circ f$ bijektiv ist, obwohl f nicht surjektiv ist und g nicht injektiv ist.

Lösung:

(a) Sei $x, y \in A$, damit $f(x) = f(y)$. Es gilt $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Daraus folgt $x = y$, weil $g \circ f$ bijektiv ist. Deshalb ist f injektiv. Sei $y \in C$. Es gibt $x \in A$, damit $g \circ f(x) = y$, weil $g \circ f$ bijektiv ist. Deshalb ist g surjektiv.

(b) $f : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ sodass $f(x) = x$ und $g : \{0, 1\} \to \{0\}$.

(c) $f : \{0\} \to \{0, 1\}$ sodass $f(0) = 0$ und $g : \{0, 1\} \to \{0\}$.