Lineare Algebra I
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux

WS 2010/2011
28. Oktober 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Kartesisches Produkt.)

(a) Was sind die Elemente des Produkt $(\{1,2,3\} \times \{4,5\})$?

(b) Was sind die Elemente des Produkts $\{1,2,3\} \times \{0\}$?

(c) Sei A eine Menge mit n Elemente. Wie viele Elemente gibt es in $A \times \{3\}$?

(d) Was sind die Elemente des Produkts $\{1,2,3\} \times \emptyset$? Was ist eigentlich die Menge $\{1,2,3\} \times \emptyset$?

Aufgabe G2 (Modulo.)
Eine Relation zwischen ganzen Zahle ist so definiert: n und m stehen in Relation genau dann, wenn die Differenz $n - m$ durch 5 teilbar ist.

(a) Zeigen Sie, dass diese Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

(b) Wie viele Äquivalenzklassen gibt es?

(c) Was sind sie genau?

Aufgabe G3 (Abbildung, Teilmenge und Schnittmenge.)
Seien M und N zwei Mengen und f eine Abbildung von M nach N. Seien A und B zwei Teilmenge von M

(a) Wenn $A \subseteq B$, wie kann man $f(A)$ und $f(B)$ vergleichen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Für beliebige A und B, wie kann man $f(A \cap B)$ und $f(A) \cap f(B)$ vergleichen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe G4 (Injektiv, surjektiv in $\mathbb{R}$.)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. In diesen folgenden Fällen entscheiden Sie, ob f injektiv, surjektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $f(x) = x$

(b) $f(x) = -3x + 5$

(c) $f(x) = x^2$

Aufgabe G5 (Injektiv, surjektiv in $\mathbb{R}^2$.)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. In diesen folgenden Fällen entscheiden Sie, ob f injektiv, surjektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $f(x, y) = (x, y)$

(b) $f(x, y) = (x + 1, -y)$

Hausübung

Aufgabe H1 (Abbildung, Vereinigung und Komplement.)
Seien M und N zwei Mengen und f eine Abbildung von M nach N. Seien A und B zwei Teilmenge von M

(a) Wie kann man $f(A \cup B)$ und $f(A) \cup f(B)$ vergleichen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Ebenso mit $f(M \setminus A)$ und $N \setminus f(A)$.

Aufgabe H2 (Injektiv und surjektiv.)
In diesen folgenden Fällen entscheiden Sie, ob f injektiv, surjektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sodass $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

(b) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass $f(x) = x^2$.

Aufgabe H3 (Eigenschaften der Injektivität und der Surjektivität.)
Seien A, B und C drei Mengen. Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Funktion.

(a) Angenommen, dass $g \circ f$ bijektiv ist, zeigen Sie, dass f injektiv ist und g surjektiv ist.

(b) Finden Sie ein Beispiel, damit $g \circ f$ nicht bijektiv ist, obwohl f injektiv ist und g surjektiv ist.

(c) Finden Sie ein Beispiel, damit $g \circ f$ bijektiv ist, obwohl f nicht surjektiv ist und g nicht injektiv ist.