Lineare Algebra I
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux

WS 2010/2011
20. Oktober 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Logisch?)

(a) Folgt aus “Wenn es regnet, gibt es Wolken”, dass es keine Wolken gibt, wenn es nicht regnet?

(b) Stellen Sie den obigen Schluss mithilfe der Aussagenlogik dar und begründen Sie, warum er falsch ist.

Lösung: Angenommen, dass die Variable p stellt dar, dass es regnet und die Variable q stellt dar, dass es Wolken gibt. Die Aussage “Wenn es regnet, gibt es Wolken” wird durch $p \Rightarrow q$ dargestellt und dass es keine Wolken gibt, wenn es nicht regnet wird durch $\neg p \Rightarrow \neg q$ dargestellt. Wenn p falsch ist und q wahr ist, ist $p \Rightarrow q$ erfüllt, die Aussage $\neg p \Rightarrow \neg q$ aber nicht.

Aufgabe G2 (Beweise mithilfe der Wahrheitstafeln)
Welche der folgenden aussagelogischen Formeln sind allgemein gültig? Welche sind immer falsch? Welche sind zueinander äquivalent?

(a) $p \vee \neg p$

(b) $p \Rightarrow (q \vee \neg q)$

(c) $p \wedge \neg p$

(d) $p \vee p$

(e) $p \wedge p$

(f) $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q$

Lösung: a,b und f sind allgemein gültig, deshalb sind sie zueinander äquivalent; c ist immer falsch; d und e sind manchmal, aber nicht immer gültig. Außerdem sind d und e äquivalent.

Aufgabe G3 (Eigenschaften der Junktoren)
Wir betrachten die zweistelligen logischen Junktoren $J \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.

(a) Welche dieser Junktoren sind kommutativ? (Ein Junktor J ist kommutativ, wenn $xJy \Leftrightarrow yJx$ gilt.)

(b) Sind die Junktoren $\vee, \wedge, \Leftrightarrow$ auch assoziativ? (Ein Junktor J ist assoziativ, wenn $(xJy)Jz \Leftrightarrow xJ(yJz)$ gilt.)

Lösung: Die Junktoren $\vee, \wedge, \Leftrightarrow$ sind kommutativ und assoziativ. Man beweist das mithilfe der Wahrheitstafeln.

Aufgabe G4 (Quantoren)
Entscheiden Sie, welche Aussagen über die natürlichen Zahlen wahr sind.

(a) $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \leq n$

(b) $\exists n \in \mathbb{N}: 3 \leq n$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}: 3 \leq n$

(d) $\forall n \in \mathbb{N}: \exists k \in \mathbb{N}: k = 2n$

(e) $\exists n \in \mathbb{N}: \forall k \in \mathbb{N}: k = 2n$

(f) $\forall k \in \mathbb{N}: \exists n \in \mathbb{N}: k = 2n$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung: a,b und d sind wahr.

Aufgabe G5 (Mengenoperationen)
Seien M eine Menge und A, B und C Teilmengen von M. en

(a) Beweisen Sie $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$.
(b) Vervollständigen und beweisen Sie $A \cup \emptyset =?$ und $A \cap \emptyset =?$.
(c) Vergleichen Sie $(A \cup B) \cup C$ und $A \cup (B \cup C)$. Welche einfachere Notation kann man daraus herleiten?

Gibt es ähnliche Regeln in der Aussagenlogik?

Lösung:

(a) Folgt aus der Kommutativität von $\vee$ und $\wedge$.
(b) $A \cup \emptyset = A$ und $A \cap \emptyset = \emptyset$.
(c) Die Aussage $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ folgt aus der Assoziativität von $\vee$. Deshalb darf man $A \cup B \cup C$ schreiben.

Hausübung

Aufgabe H1 (Wahrheitstafeln)
Weisen Sie nach, dass die folgenden Aussagen allgemeingültig sind, indem Sie Wahrheitstafeln aufstellen.

(a) $p \Leftrightarrow p$
(b) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$
(c) $((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

Lösung: Mithilfe der Wahrheitstafeln.

Aufgabe H2 (Quantoren, de Morgansche Regeln)
Sei M eine Menge. Drücken Sie die Negationen der folgenden Aussagen so aus, dass die Negationssymbole so weit rechts wie möglich stehen.

(a) $\forall x \in M : \exists y \in M : P(x, y)$
(b) $\forall x \in M : P(x) \vee Q(x)$
(c) $\forall x \in M : P(x) \vee (\forall y \in M : Q(y))$
(d) $\forall x \in M : P(x) \vee (\exists y \in M : Q(x, y) \wedge R(y))$
(e) $\forall x \in M : \exists y \in M : (P(y) \Rightarrow y = y)$

Lösung:

(a) $\exists x \in M : \forall y \in M : \neg P(x, y)$
(b) $\exists x \in M : \neg P(x) \wedge \neg Q(x)$
(c) $\exists x \in M : \neg P(x) \wedge (\exists y \in M : \neg Q(y))$
(d) $\exists x \in M : \neg P(x) \wedge (\forall y \in M : \neg Q(x, y) \vee \neg R(y))$
(e) $\exists x \in M : \forall y \in M : (P(y) \wedge y \neq y)$

Aufgabe H3 (Menge)
Seien M eine Menge und A und B Teilmenge von M. Vergleichen Sie die folgenden Mengen.

(a) Vergleichen Sie $M \setminus (A \cup B)$ und $(M \setminus A) \cap (M \setminus B)$.
(b) Vergleichen Sie $M \setminus (A \cap B)$ und $(M \setminus A) \cup (M \setminus B)$.
(c) Vergleichen Sie $(M \setminus A) \setminus B$ und $(M \setminus B) \setminus A$.
(d) Vergleichen Sie $(M \setminus A) \setminus B$ und $M \setminus (B \setminus A)$.

Gibt es ähnliche Regeln in der Aussagenlogik?

Lösung: Es gelten:

(a) $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$.
(b) $M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$.
(c) $(M \setminus A) \setminus B = (M \setminus B) \setminus A$.
(d) $(M \setminus A) \setminus B \subseteq M \setminus (B \setminus A)$.

Sei $x \in M \setminus (A \cup B)$. Dann gilt $x \notin A \cup B$, also $x \notin A$ und $x \notin B$, somit $x \in M \setminus A$ und $x \in M \setminus B$, also $x \in (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$. Dies zeigt $M \setminus (A \cup B) \subseteq (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$. Ähnlich zeigt man $M \setminus (A \cup B) \supseteq (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$ und die anderen Fälle.

Bei der letzten Aussage gilt die andere Inklusion “$\supseteq$” nicht: Seien z.B. alle drei Mengen $M = A = B$ gleich und nicht leer, dann ist $(M \setminus A) \setminus B = \emptyset \setminus M = \emptyset$, aber $M \setminus (B \setminus A) = M \setminus \emptyset = M$.